Příklad 1a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\,(1-\cos(2/n))}{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)-\log\left(\frac{n+2}{n}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\,(1-\cos(2/n))}{\log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+2}}{\log\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} \frac{1-\cos\frac{2}{n}}{\left(\frac{2}{n}\right)^2} \frac{n(n+2)}{\left(\frac{n}{2}\right)^2} =$$

$$1.\frac{1}{2}.4 = 2.$$

Používám přitom Větu o aritmetice limit a Větu o limitě složené funkce s vnější spojitou funkcí a taky základní limity, vše oprávněně, výsledek má smysl.

Příklad 1b

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(\sqrt{x^5}-\sqrt{x^3}-x^2\log x)\log(arccotgx) = -\infty,$$

bo argument arctg se chová přibližně jako $x^{5/2}$, tedy *arctg* jde k $\pi/2$, arccotg jde k nule zprava, tedy logaritmus z něj jde do mínus nekonečna, po cestě dvakrát používáme Větu o limitě složené funkce se spojitou vnější funkcí a Větu o aritmetice limit, výsledek má smysl, takže použití bylo oprávněné ;D.

Příklad 2 (4 body)

Použijeme AG nerovnost:

$$x(2-x) \leq \left(\frac{x+(2-x)}{2}\right)^2 = 1.$$

Tím máme omezenost funkce jedničkou. Navíc funkce $y = 2x-x^2$ je rostoucí na $[0,1]$, takže je posloupnost (a_n) shora omezená a rostoucí, takže má limitu, konec. ;D

Příklad 3 (6 bodů)

Odpovědí buď následující obrázek, ostatní z něj buď vykoukej nebo dopočítej ;D. Rozšíření hodnotou π je zprava spojité. Horní funkce je f, dolní f'.