

- Krivkový integrál - reziduová věta

[12. Vypočítejte hodnotu integrálu přes množinu $A[+] = \{z[k], \text{Im}(z[k]) > 0\}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx$$

[Nejprve si zjistíme póly:

[> `solve(z^2+2*z+2=0);`

$$-1 + I, -1 - I$$

[Oba póly jsou dvojnásobné, přičemž my si vybereme pouze ten, které splňují vstupní podmínku.

[Použijeme reziduovou větu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx = 2\pi I \text{Re}z\left(\frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2}, -1 + I\right)$$

[Vypočet rezidua provedeme přes limitu:

[> `der:=diff(x^2/(x+1+I)^2,x);`

$$der := \frac{2x}{(x+1+I)^2} - \frac{2x^2}{(x+1+I)^3}$$

[> `l:=limit(der,x=I-1);`

$$l := \frac{-1}{2} I$$

[Ted už stačí jen dosadit do vzorce:

[> `nTEGR:=2*Pi*I*l;`

$$nTEGR := \pi$$

[Což je výsledek

[13. Vypočítejte krivkový integrál, kde C je kladně proběhnutá kružnice o středu $2i$ a poloměru 2

$$\int_C \frac{z e^z}{z^2 + 4} dz$$

[Zřejmě platí následující rovnost

$$\frac{z e^z}{z^2 + 4} = \frac{e^z \left(\frac{1}{z - 2I} + \frac{1}{z + 2I} \right)}{2}$$

[Napišeme $g(z) = \exp(z)/2 \cdot (z + 2I)$, $h(z) = \exp(z)/2$, $f(z) = g(z) + h(z)/(z - 2I)$ a uvažujeme jednoduchou souvislou oblast $\{z, |z - 2I| < 3\}$ na které jsou funkce g, h holomorfní. Integrál přes křivku C funkce g je roven nule, integrál z funkce $h(z)/(z - 2I)$ je roven $\pi \cdot (I \cdot \cos 2 - \sin 2) = I$.

[Aby to bylo aspoň trochu zajímavé, zkusíme si něco nakreslit:

[> `kriv:=plot3d([2*cos(t),2*sin(t)+2,0],t=0..2*Pi,r=0..2,color=g`

```

reen, thickness=3):
> Real:=(x,y)->Re((x+y*I)*exp(x+y*I)/((x+y*I)^2+4));

      Real := (x, y) → ℔  $\left( \frac{(x+yI) e^{(x+yI)}}{(x+yI)^2+4} \right)$ 

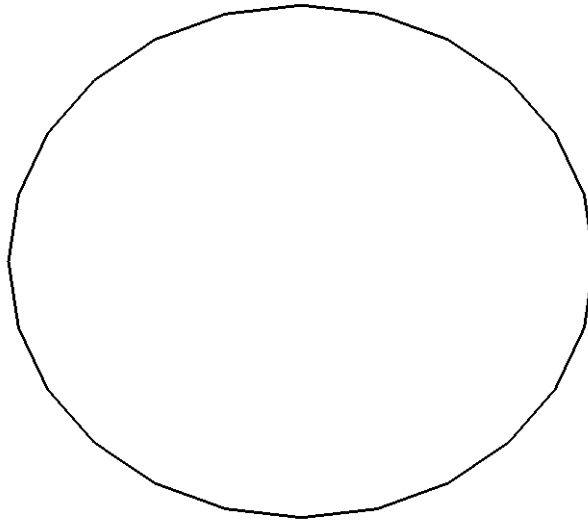
> Imag:=(x,y)->Im((x+y*I)*exp(x+y*I)/((x+y*I)^2+4));

      Imag := (x, y) → ℑ  $\left( \frac{(x+yI) e^{(x+yI)}}{(x+yI)^2+4} \right)$ 

> gr:=plot3d(Real,x=1..4,y=1..4,style=PATCHNOGRID):
Warning, unable to evaluate the function to numeric values in the region;
see the plotting command's help page to ensure the calling sequence is
correct

> display(kriv,gr);

```



[Tak tohle se netvari privetive, takze si neco vykreslim spise u vicenasobnych integralu :|

[>
[>

[[>
[>