

[Integral s parametrem - limita

[>

- Zadání

[Mámeť spočísti limitu:

[> `Limit(Int(exp(-n*x)*sin(a*x)/x,x=0..infinity),n=infinity);`

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{(-n x)} \sin(a x)}{x} dx$$

[Maple by byl hotov hned ...

[> `assume(n,AndProp(positive,integer));`

[> `limit(int(exp(-n*x)*sin(a*x)/x,x=0..infinity),n=infinity);`
0

[... my vše dobře rozvážíme.

- Ověření předpokladů pro záměnu limity a integrálu

[Protože je

[> `Int(abs(exp(-n*x)*sin(a*x)/x),x = 0 .. infinity) <= Int(exp(-x)*abs(sin(a*x))/x,x = 0 .. infinity);`

$$\int_0^{\infty} e^{(-n \Re(x))} \left| \frac{\sin(a x)}{x} \right| dx \leq \int_0^{\infty} \frac{e^{(-x)} |\sin(a x)|}{x} dx$$

[Kterýžto integrál u ∞ jistě konverguje a u 0 jest integrand asymptoticky roven

[> `sin(a*x)/x;`

$$\frac{\sin(a x)}{x}$$

[což jest u 0 asymptoticky rovno a , a tedy integrál konverguje také, a tedy lze zaměnit pořadí limity a integrálu podle Lebesgueovy věty.

- Výpočet

[Snadno tedy dopočteme

[> `Limit(Int(exp(-n*x)*sin(a*x)/x,x=0..infinity),n=infinity)=Int(Limit(exp(-n*x)*sin(a*x)/x,n=infinity),x=0..infinity);`

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{(-n x)} \sin(a x)}{x} dx = \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{(-n x)} \sin(a x)}{x} dx$$

[Což nemůže býti nic jiného nežli

[> `Int(0,x=0..infinity)=0;`

$$\int_0^{\infty} 0 dx = 0$$

[>

[Jak nám byl Maple správně předpověděl.