

# SINGULARITY A REZIDUA

## LEKCE36-KRZ

singulární bod  
izolovaná  
singularita  
odstranitelná singu-  
larita  
pól  
podstatná  
singularita  
jednoduchý pól  
Pickardova věta

reziduum  
reziduová věta

## STANDARDY

Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# IZOLOVANÉ SINGULARITY

Kvůli jednoduššímu vyjadřování se bude v této kapitole předpokládat, že mezikruží je vždy otevřené a neprázdné, tj. ve vyjádření  $0 < |z - w| < R$  je vždy  $R > 0$ .

**DEFINICE.** Bod uzávěru definičního oboru holomorfní funkce  $f$  se nazývá **singulární**, jestliže buď  $f$  není v tomto bodě definovaná nebo v tomto bodě není holomorfní.

Definice singularity je velmi obecná, a proto se v dalším textu budou vyšetřovat jen speciálnější singulární body, k jejichž vyšetřování pomohou Laurentovy řady.

**DEFINICE.** Singulární bod  $w \in \mathbb{C}$  funkce  $f$  se nazývá **izolovaný singulární bod** (stručněji **izolovaná singularita**), jestliže existuje okolí  $U$  bodu  $w$  tak, že  $f$  je holomorfní na množině  $U \setminus \{w\}$ .

Je-li  $w$  izolovaný singulární bod funkce  $f$ , je  $f$  holomorfní v nějakém mezikruží  $0 < |z - w| < R$  a dá se tam rozvinout v Laurentovu řadu. Pomocí tohoto rozvoje lze singulární bod klasifikovat.

**DEFINICE.** Necht'  $w$  je izolovaná singularita funkce  $f$  a  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$  je Laurentova řada funkce  $f$ . Singularita ve  $w$  se nazývá

- **odstranitelná**, jestliže  $a_n = 0$  pro všechna záporná  $n$ ;
- **pól řádu  $k$**  ( $k \in \mathbb{N}$ ), jestliže  $a_{-k} \neq 0$  a  $a_n = 0$  pro všechna  $n < -k$ ;
- **podstatná**, jestliže  $a_n \neq 0$  pro nekonečně mnoho záporných  $n$ ;

**LEKCE36-KRZ**  
singulární bod  
izolovaná  
singularita  
odstranitelná singularita  
pól  
podstatná  
singularita  
jednoduchý pól  
Pickardova věta  
reziduum  
reziduová věta  
**STANDARDY**  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Místo „pól řádu 1“ se říká častěji **jednoduchý pól**.

**VĚTA.** Necht'  $w$  je izolovaný singulární bod funkce  $f$ .

1. V bodě  $w$  je odstranitelná singularita právě když  $\lim_{z \rightarrow w} f(z) \in \mathbb{C}$ .
2. V bodě  $w$  je pól právě když  $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = \infty$ .
3. V bodě  $w$  je podstatná singularita právě když  $\lim_{z \rightarrow w} f(z)$  neexistuje.

Chování funkce v okolí podstatné singularity  $w$  funkce  $f$  je složité. Existují aspoň dvě posloupnosti konvergující k  $w$ , jejichž funkční hodnoty konvergují k různým číslům. Není příliš obtížné ukázat, že takovéto limity funkčních hodnot pokryjí  $\mathbb{C}$  (viz *Otázky*). Podstatně těžší je dokázat následující tvrzení:

**VĚTA.** (Pickard) Je-li  $w$  podstatná singularita funkce  $f$ , pak na každém okolí bodu  $w$  nabývá  $f$  všech hodnot z  $\mathbb{C}$  kromě nejvýše jedné.

Poznámky 1   Příklady 1   Otázky 1   1

**LEKCE36-KRZ**  
singulární bod  
izolovaná  
singularita  
odstranitelná singu-  
larita  
pól  
podstatná  
singularita  
jednoduchý pól  
Pickardova věta  
reziduum  
reziduová věta  
**STANDARDY**  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# REZIDUA

Necht' funkce  $f$  je holomorfní v mezikruží  $M = \{z; 0 < |z - w| < R\}$ , má tam Laurentův rozvoj  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - w)^n$  a  $C$  je jednoduchá uzavřená křivka ležící v  $M$  a obsahující  $w$  ve svém vnitřku, pak

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \oint_C (z - w)^n dz = 2\pi i a_{-1}.$$

Odtud je vidět, že koeficient s indexem  $-1$  v Laurentově rozvoji hraje velkou roli při integraci a proto má svůj název.

**DEFINICE.** Necht'  $f$  je holomorfní v nějakém mezikruží  $0 < |z - w| < R$ . Koeficient s indexem  $-1$  v Laurentově rozvoji funkce  $f$  okolo  $w$  se nazývá **reziduum** funkce  $f$  v bodě  $w$  a značí se  $\operatorname{res}_w f$ .

Je zřejmé, že pokud je  $f$  holomorfní ve  $w$  nebo tam má odstranitelnou singularitu, je  $\operatorname{res}_w f = 0$ .

Z obecné Cauchyovy věty se z předchozí integrace Laurentovy řady dostává následující důležité tvrzení:

**VĚTA. (Reziduová věta)** Necht'  $f$  je holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky  $C$  kromě konečně mnoha bodů  $w_1, \dots, w_k$  ležících uvnitř  $C$ . Pak platí

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^k \operatorname{res}_{w_i} f.$$

## LEKCE36-KRZ

singulární bod	
izolovaná	
singularita	
odstranitelná singularita	
pól	
podstatná	
singularita	
jednoduchý pól	
Pickardova věta	
reziduum	
reziduová věta	
<b>STANDARDY</b>	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro výpočty integrálů pomocí reziduové věty je tedy potřeba umět rezidua vypočítat. Z konstrukce rozvoje  $f$  v Laurentovu řadu je znám vzorec

$$\operatorname{res}_w f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} f(z) dz,$$

kde  $C_r$  je vhodná kružnice okolo  $w$ . Toto je také jedna z mála možností, jak vypočítat reziduum v podstatné singularitě (další možností je Laurentův rozvoj získaný vhodným postupem z jiné Laurentovy nebo Taylorovy řady).

Pro póly je vhodnější postup pomocí limit. Je-li  $w$  jednoduchý pól funkce  $f$ , je funkce  $(z - w)f(z)$  holomorfní ve  $w$  a tedy

$$\operatorname{res}_w f = \lim_{z \rightarrow w} (z - w)f(z).$$

Je-li  $w$  pól 2.řádu, bude ve  $w$  holomorfní funkce  $(z - w)^2 f(z)$ , ale její limita ve  $w$  není reziduum, ale koeficient  $a_{-2}$  jejího Laurentova rozvoje. Pokud ale tuto funkci zderivujete a pak provedete limitu, dostane se reziduum.

Obecně dostaneme následující:

**VĚTA.** (Pravidlo 1) Necht'  $f$  má v bodě  $w$  pól řádu  $k$ . Pak

$$\operatorname{res}_w f = \frac{1}{(k - 1)!} \lim_{z \rightarrow w} ((z - w)^k f(z))^{(k-1)}.$$

**VĚTA.** (Pravidlo 2) Necht'  $f, g$  jsou holomorfní v bodě  $w$  a  $f(w) \neq 0$ . Je-li  $g(w) = 0, g'(w) \neq 0$ , pak

$$\operatorname{res}_w \frac{f}{g} = \frac{f(w)}{g'(w)}.$$

#### LEKCE36-KRZ

singulární bod	
izolovaná	
singularita	
odstranitelná singularita	
pól	
podstatná	
singularita	
jednoduchý pól	
Pickardova věta	
reziduum	
reziduová věta	
STANDARDY	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** (Pravidlo 3) Je-li  $h$  holomorfní ve  $w$  a  $g$  má jednoduchý pól ve  $w$ , pak  $\operatorname{res}_w(gh) = h(w)\operatorname{res}_w g$ .

Některé další metody výpočtu reziduí v pólech jsou uvedeny v *Otázkách*.

**DEFINICE.** Necht'  $f$  je holomorfní v nějakém okolí nekonečna. Definujeme

$$\operatorname{res}_\infty f = \operatorname{res}_0 \left( \frac{-1}{z^2} \cdot f \left( \frac{1}{z} \right) \right) .$$

Příklady 2   Otázky 2   2

**LEKCE36-KRZ**  
singulární bod  
  izolovaná  
  singularita  
  odstranitelná singularita  
  pól  
  podstatná  
  singularita  
  jednoduchý pól  
  Pickardova věta  
reziduum  
  reziduová věta  
**STANDARDY**  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# VÝPOČET INTEGRÁLŮ REÁLNÝCH FUNKCÍ

Některé integrály reálných funkcí reálné proměnné lze počítat pomocí reziduové věty.

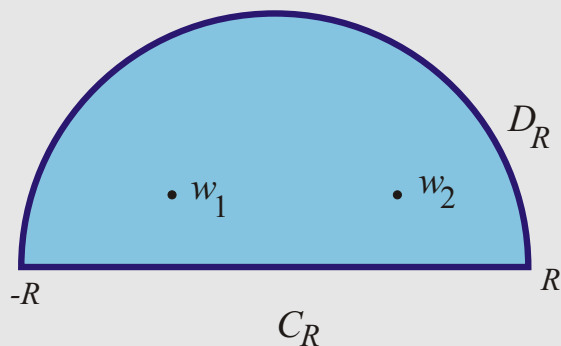
Interval, po kterém se integruje, se rozšíří na jednoduchou uzavřenou křivku v rovině a daná reálná funkce se vhodně rozšíří na komplexní funkci komplexní proměnné.

Postup bude ukázán na integraci přes celé  $\mathbb{R}$  a přes interval  $[0, 2\pi]$ .

( TYP I. Integrál z racionální funkce. )

Nechť  $h$  je reálná funkce reálné proměnné. Integrál  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx$  se někdy dá spočítat následujícím způsobem.

Vezme se  $R > 0$  a jednoduchá uzavřená křivka  $C_R$ , která leží v jedné z polorovin  $x \geq 0$  nebo  $x \leq 0$  (nechť je to např. první případ) a na ose  $x$  je totožná s úsečkou  $[-R, R]$  ( $D_R$  bude část  $C_R$  ležící v otevřené horní polorovině). Může se požadovat, aby  $\min\{|z|; z \in D_R\}$  s rostoucím  $R$  konvergovalo k  $\infty$  (např. se za  $D_R$  bere polokružnice se středem v  $0$  a poloměrem  $R$ ).



Pokud  $h$  je zúžením holomorfní funkce  $f$  na horní polorovině, která tam má jen ko-

## LEKCE36-KRZ

singulární bod	
izolovaná	
singularita	
odstranitelná singularita	
pól	
podstatná singularita	
jednoduchý pól	
Pickardova věta	
reziduum	
reziduová věta	
<b>STANDARDY</b>	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

nečně mnoho singularit  $w_1, \dots, w_n$ , pak pro dostatečně velká  $R$  je

$$\int_{-R}^R h(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^k \operatorname{res}_{w_i} f - \int_{D_R} f(z) dz .$$

Odtud vyplývá, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^k \operatorname{res}_{w_i} f - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_R} f(z) dz .$$

Není nutné brát všechna  $R > 0$ , stačí neomezenou rostoucí posloupnost  $R_n$ , pro kterou je snadné spočítat  $\lim_n \int_{D_{R_n}} f(z) dz$ .

Nejlepším případem je ten, kdy poslední limita je rovna 0. To nastane např. pro některé racionální funkce.

**VĚTA.** ( TYP I. Integrál z racionální funkce. ) Necht'  $P, Q$  jsou polynomy stupňů  $k, n$  resp., přičemž  $n - k > 1$  a  $Q$  nemá reálné kořeny. Potom pro racionální funkci  $f = \frac{P}{Q}$  platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^k \operatorname{res}_{w_i} f .$$

Předchozí postup lze použít i na případ, kdy je racionální funkce vynásobená omezenou funkcí, např.  $e^{iz}$ , nebo sice neomezenou funkcí, ale takovou, že limita v  $\pm\infty$  této funkce lomené lineární funkcí je 0, např.  $\sqrt{|x|}$ .

#### LEKCE36-KRZ

- singulární bod
- izolovaná
- singularita
- odstranitelná singularita
- pól
- podstatná
- singularita
- jednoduchý pól
- Pickardova věta
- reziduum
- reziduová věta
- STANDARDY**
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



U goniometrických funkcí, např.  $\cos x$ , bývá vhodné je rozšířit na  $\mathbb{C}$  nikoli na  $\cos z$ , ale na složku mocniny  $e^{iz}$ . Výsledkem je pak příslušná složka komplexního výsledku.

**VĚTA.** ( Jordanovo lemma. ) Necht'  $\rho > 0$ ,  $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$  a funkce  $f$  je spojitá na  $\{z \in \mathbb{C} : \arg z \in [\alpha, \beta], |z| > \rho\}$  taková, že

$$\lim_{z \rightarrow \infty, \arg z \in [\alpha, \beta]} f(z) = 0.$$

Pak pro  $r > \rho$ ,  $b > 0$  a křivku  $\varphi_r(t) = r e^{it}$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  je

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\varphi_r} f(z) e^{ibz} dz = 0.$$

**VĚTA.** ( TYP II. Integrál z racionální funkce vynásobené  $\cos$  nebo  $\sin$  ) Necht'  $Q$  je racionální funkce taková, že nemá v  $\mathbb{R}$  pól a pro  $z \rightarrow \infty$  je  $Q(z) = O(z^{-1})$  (t.j. stupeň jmenovatele alespoň o 1 větší než stupeň čitatele). Pro  $b > 0$  označme  $f(z) = Q(z) e^{ibz}$ . Pak

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) \cos(bx) dx = \Re \left( 2\pi i \cdot \sum_{a \in \mathbb{C}^+, Q(a)=\infty} \operatorname{res}_a f \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) \sin(bx) dx = \Im \left( 2\pi i \cdot \sum_{a \in \mathbb{C}^+, Q(a)=\infty} \operatorname{res}_a f \right)$$

**LEKCE36-KRZ**

- singulární bod
- izolovaná
- singularita
- odstranitelná singularita
- pól
- podstatná
- singularita
- jednoduchý pól
- Pickardova věta
- reziduum
- reziduová věta
- STANDARDY**
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Integruje-li se funkce na intervalu  $(0, +\infty)$ , dá se přejít k sudé funkci na intervalu  $(-\infty, +\infty)$  a použít předchozí postup.

Někdy je nutné se vyhnout bodu 0, např. u funkce  $\sin x/x$  – viz *Příklady*.

( TYP III. Integrál z racionální v sinu a kosinu. )

Přechodem ke křivkovému integrálu se dají spočítat i některé integrály goniometrických funkcí přes omezené intervaly. Jako příklad lze vzít

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \sin x}.$$

Stačí zvolit  $z = e^{ix}$ , čímž se z uvedeného integrálu stane integrál

$$\int_{|z|=1} \frac{2 dz}{z^2 + 6iz - 1},$$

který se již spočte pomocí reziduové věty.

**VĚTA.** ( TYP III. Integrál z racionální funkce v sinech a kosinech. Necht'  $Q(a, b)$  je racionální funkce dvou (komplexních) proměnných taková, že pro  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a^2 + b^2 = 1$  v ní nedělíme nulou. Pak funkce

$$T(z) := Q\left(\frac{z + 1/z}{2}, \frac{z - 1/z}{2i}\right) / (iz)$$

jedné komplexní proměnné  $z$  je racionální, nemá póly na jednotkové kružnici a platí

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t) dt = 2\pi i \cdot \sum_{|a|<1, T(a)=\infty} \operatorname{res}_a T.$$

#### LEKCE36-KRZ

singulární bod	
izolovaná	
singularita	
odstranitelná singularita	
pól	
podstatná	
singularita	
jednoduchý pól	
Pickardova věta	
reziduum	
reziduová věta	
STANDARDY	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

STANDARDY z kapitoly

SINGULARITY A REZIDUA

**LEKCE36-KRZ**

singulární bod  
izolovaná  
singularita  
odstranitelná singularita  
pól  
podstatná  
singularita  
jednoduchý pól  
Pickardova věta

reziduum  
reziduová věta

**STANDARDY**

Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# IZOLOVANÉ SINGULARITY

**DEFINICE.** Bod uzávěru definičního oboru holomorfní funkce  $f$  se nazývá **singulární**, jestliže buď  $f$  není v tomto bodě definovaná nebo v tomto bodě není holomorfní.

**DEFINICE.** Singulární bod  $w \in \mathbb{C}$  funkce  $f$  se nazývá **izolovaný singulární bod** (stručněji **izolovaná singularita**), jestliže existuje okolí  $U$  bodu  $w$  tak, že  $f$  je holomorfní na množině  $U \setminus \{w\}$ .

**DEFINICE.** Necht'  $w$  je izolovaná singularita funkce  $f$  a  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-w)^n$  je Laurentova řada funkce  $f$ . Singularita ve  $w$  se nazývá

- **odstranitelná**, jestliže  $a_n = 0$  pro všechna záporná  $n$ ;
- **pól řádu  $k$**  ( $k \in \mathbb{N}$ ), jestliže  $a_{-k} \neq 0$  a  $a_n = 0$  pro všechna  $n < -k$ ;
- **podstatná**, jestliže  $a_n \neq 0$  pro nekonečně mnoho záporných  $n$ ;

Místo „pól řádu 1“ se říká častěji **jednoduchý pól**.

**VĚTA.** Necht'  $w$  je izolovaný singulární bod funkce  $f$ .

1. V bodě  $w$  je odstranitelná singularita právě když  $\lim_{z \rightarrow w} f(z) \in \mathbb{C}$ .
2. V bodě  $w$  je pól právě když  $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = \infty$ .
3. V bodě  $w$  je podstatná singularita právě když  $\lim_{z \rightarrow w} f(z)$  neexistuje.

## LEKCE36-KRZ

singulární bod	
izolovaná	
singularita	
odstranitelná	sin-
ularita	gularita
pól	
podstatná	
singularita	
jednoduchý pól	
Pickardova věta	
reziduum	
reziduová věta	
<b>STANDARDY</b>	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** (Pickard) Je-li  $w$  podstatná singularita funkce  $f$ , pak na každém okolí bodu  $w$  nabývá  $f$  všech hodnot z  $\mathbb{C}$  kromě nejvýše jedné.

#### LEKCE36-KRZ

singulární bod

izolovaná

singularita

odstranitelná singularita

pól

podstatná

singularita

jednoduchý pól

Pickardova věta

reziduum

reziduová věta

#### STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# REZIDUA

Necht' funkce  $f$  je holomorfní v mezikruží  $M = \{z; 0 < |z - w| < R\}$ , má tam Laurentův rozvoj  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - w)^n$  a  $C$  je jednoduchá uzavřená křivka ležící v  $M$  a obsahující  $w$  ve svém vnitřku, pak

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \oint_C (z - w)^n dz = 2\pi i a_{-1}.$$

**DEFINICE.** Necht'  $f$  je holomorfní v nějakém mezikruží  $0 < |z - w| < R$ . Koefficient s indexem  $-1$  v Laurentově rozvoji funkce  $f$  okolo  $w$  se nazývá **reziduum** funkce  $f$  v bodě  $w$  a značí se  $\text{res}_w f$ .

**VĚTA.** (Reziduová věta) Necht'  $f$  je holomorfní na a uvnitř jednoduché uzavřené křivky  $C$  kromě konečně mnoha bodů  $w_1, \dots, w_k$  ležících uvnitř  $C$ . Pak platí

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^k \text{res}_{w_i} f.$$

Z konstrukce rozvoje  $f$  v Laurentovu řadu je znám vzorec

$$\text{res}_w f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} f(z) dz,$$

## LEKCE36-KRZ

singulární bod	
izolovaná	
singularita	
odstranitelná singularita	
pól	
podstatná singularita	
jednoduchý pól	
Pickardova věta	
reziduum	
reziduová věta	
<b>STANDARDY</b>	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

kde  $C_r$  je vhodná kružnice okolo  $w$ .

**VĚTA.** (Pravidlo 1) Necht'  $f$  má v bodě  $w$  pól řádu  $k$ . Pak

$$\operatorname{res}_w f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow w} \left( (z-w)^k f(z) \right)^{(k-1)}.$$

**VĚTA.** (Pravidlo 2) Necht'  $f, g$  jsou holomorfní v bodě  $w$  a  $f(w) \neq 0$ . Je-li  $g(w) = 0, g'(w) \neq 0$ , pak

$$\operatorname{res}_w \frac{f}{g} = \frac{f(w)}{g'(w)}.$$

**VĚTA.** (Pravidlo 3) Je-li  $h$  holomorfní ve  $w$  a  $g$  má jednoduchý pól ve  $w$ , pak  $\operatorname{res}_w(gh) = h(w)\operatorname{res}_w g$ .

**DEFINICE.** Necht'  $f$  je holomorfní v nějakém okolí nekonečna. Definujeme

$$\operatorname{res}_\infty f = \operatorname{res}_0 \left( \frac{-1}{z^2} \cdot f \left( \frac{1}{z} \right) \right).$$

**LEKCE36-KRZ**

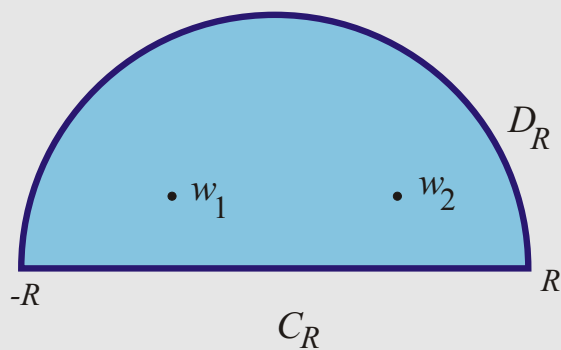
singulární bod  
izolovaná  
singularita  
odstranitelná singularita  
pól  
podstatná  
singularita  
jednoduchý pól  
Pickardova věta  
reziduum  
reziduová věta  
**STANDARDY**  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# VÝPOČET INTEGRÁLŮ REÁLNÝCH FUNKCÍ

( TYP I. Integrál z racionální funkce. )

Nechť  $h$  je reálná funkce reálné proměnné. Integrál  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx$  se někdy dá spočítat následujícím způsobem.

Vezme se  $R > 0$  a jednoduchá uzavřená křivka  $C_R$ , která leží v jedné z polorovin  $x \geq 0$  nebo  $x \leq 0$  (nechť je to např. první případ) a na ose  $x$  je totožná s úsečkou  $[-R, R]$  ( $D_R$  bude část  $C_R$  ležící v otevřené horní polorovině). Může se požadovat, aby  $\min\{|z|; z \in D_R\}$  s rostoucím  $R$  konvergovalo k  $\infty$  (např. se za  $D_R$  bere polokružnice se středem v 0 a poloměrem  $R$ ).



Pokud  $h$  je zúžením holomorfní funkce  $f$  na horní polorovině, která tam má jen konečně mnoho singularit  $w_1, \dots, w_n$ , pak pro dostatečně velká  $R$  je

$$\int_{-R}^R h(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^k \text{res}_{w_i} f - \int_{D_R} f(z) dz .$$

## LEKCE36-KRZ

singulární bod
izolovaná
singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
<b>STANDARDY</b>
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Odtud vyplývá, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^k \operatorname{res}_{w_i} f - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_R} f(z) dz.$$

Není nutné brát všechna  $R > 0$ , stačí neomezenou rostoucí posloupnost  $R_n$ , pro kterou je snadné spočítat  $\lim_n \int_{D_{R_n}} f(z) dz$ .

Nejlepším případem je ten, kdy poslední limita je rovna 0. To nastane např. pro některé racionální funkce.

**VĚTA.** ( TYP I. Integrál z racionální funkce. ) Necht'  $P, Q$  jsou polynomy stupňů  $k, n$  resp., přičemž  $n - k > 1$  a  $Q$  nemá reálné kořeny. Potom pro racionální funkci  $f = \frac{P}{Q}$  platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^k \operatorname{res}_{w_i} f.$$

**VĚTA.** ( Jordanovo lemma. ) Necht'  $\rho > 0$ ,  $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$  a funkce  $f$  je spojitá na  $\{z \in \mathbb{C} : \arg z \in [\alpha, \beta], |z| > \rho\}$  taková, že

$$\lim_{z \rightarrow \infty, \arg z \in [\alpha, \beta]} f(z) = 0.$$

Pak pro  $r > \rho$ ,  $b > 0$  a křivku  $\varphi_r(t) = r e^{it}$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  je

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\varphi_r} f(z) e^{ibz} dz = 0.$$

#### LEKCE36-KRZ

singulární bod	
izolovaná	
singularita	
odstranitelná singu-	
larita	
pól	
podstatná	
singularita	
jednoduchý pól	
Pickardova věta	
reziduum	
reziduová věta	
STANDARDY	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** ( TYP II. Integrál z racionální funkce vynásobené  $\cos$  nebo  $\sin$  ) Necht'  $Q$  je racionální funkce taková, že nemá v  $\mathbb{R}$  pól a pro  $z \rightarrow \infty$  je  $Q(z) = O(z^{-1})$  (t.j. stupeň jmenovatele alespoň o 1 větší než stupeň čitatele). Pro  $b > 0$  označme  $f(z) = Q(z) e^{ibz}$ . Pak

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) \cos(bx) \, dx = \Re \left( 2\pi i \cdot \sum_{a \in \mathbb{C}^+, Q(a)=\infty} \operatorname{res}_a f \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) \sin(bx) \, dx = \Im \left( 2\pi i \cdot \sum_{a \in \mathbb{C}^+, Q(a)=\infty} \operatorname{res}_a f \right)$$

Integruje-li se funkce na intervalu  $(0, +\infty)$ , dá se přejít k sudé funkci na intervalu  $(-\infty, +\infty)$  a použít předchozí postup.

Někdy je nutné se vyhnout bodu 0, např. u funkce  $\sin x/x$  – viz *Příklady*.

( TYP III. Integrál z racionální v sinu a kosinu. )

Přechodem ke křivkovému integrálu se dají spočítat i některé integrály goniometrických funkcí přes omezené intervaly. Jako příklad lze vzít

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \sin x}.$$

Stačí zvolit  $z = e^{ix}$ , čímž se z uvedeného integrálu stane integrál

$$\int_{|z|=1} \frac{2 \, dz}{z^2 + 6iz - 1},$$

**LEKCE36-KRZ**

- singulární bod
- izolovaná
- singularita
- odstranitelná singularita
- pól
- podstatná
- singularita
- jednoduchý pól
- Pickardova věta
- reziduuum
- reziduová věta
- STANDARDY**
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

který se již spočte pomocí reziduové věty.

**VĚTA.** ( TYP III. Integrál z racionální funkce v sinech a kosinech. Necht'  $Q(a, b)$  je racionální funkce dvou (komplexních) proměnných taková, že pro  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a^2 + b^2 = 1$  v ní nedělíme nulou. Pak funkce

$$T(z) := Q\left(\frac{z + 1/z}{2}, \frac{z - 1/z}{2i}\right) / (iz)$$

jedné komplexní proměnné  $z$  je racionální, nemá póly na jednotkové kružnici a platí

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t) dt = 2\pi i \cdot \sum_{|a| < 1, T(a) = \infty} \operatorname{res}_a T.$$

**VĚTA.** Necht'  $f$  má jednoduchý pól v  $z_0$ , necht'  $\varphi_r(t) = z_0 + re^{it}$  pro  $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ . Pak

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\varphi_r} f(z) dz = \alpha \cdot i \cdot \operatorname{res}_{z_0} f.$$

### Rozšíření Gama funkce na komplexní čísla.

Podle definice je  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$  pro  $x > 0$ . Dejte nyní za  $x$  komplexní číslo  $z$ , použijte pro obecnou mocninu její hlavní větev a zjistíte, že  $\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$  konverguje, jakmile  $\Re(z) > 0$ . V této polorovině je holomorfní (derivace za integrálem).

Podle vztahu  $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$  se rozšíří definice Gama funkce na celou rovinu kromě bodů  $0, -1, -2, -3, \dots$ . Tato rozšířená funkce je holomorfní, v bodech  $0, -1, -2, -3, \dots$  jsou jednoduché póly a  $\operatorname{res}_{-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$  (ověřte).

**LEKCE36-KRZ**  
singulární bod  
izolovaná  
singularita  
odstranitelná singularita  
pól  
podstatná  
singularita  
jednoduchý pól  
Pickardova věta  
reziduum  
reziduová věta  
**STANDARDY**  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

## $\zeta$ funkce.

V předchozí kapitole v *Příkladech 1* bylo ukázáno, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$  konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro  $\Re z > 1$  a diverguje pro  $\Re z \leq 0$ . Pro  $\Re z > 1$  je tedy funkce  $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$  holomorfní.

$\zeta$  lze rozšířit na holomorfní funkci všude kromě bodu 1, kde má jednoduchý pól s reziduem 1, v bodech  $-2, -4, -6, \dots$  jsou jednoduché nulové hodnoty. Dále má  $\zeta$  nekonečně mnoho nulových hodnot v pásu  $0 < \Re(z) < 1$  (Riemannova hypotéze tvrdí, že tyto nulové hodnoty všechny leží na přímce  $\Re(z) = 1/2$ ).

Existuje zajímavá souvislost  $\zeta$  funkce s prvočíslly:

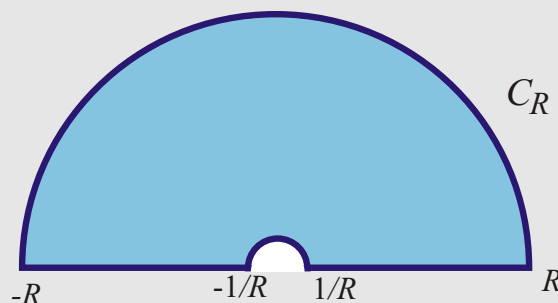
$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}},$$

kde  $p_n$  je  $n$ -té prvočísllo. Rovnost platí pro  $\Re(z) > 1$ .

**Příklad.** Spočtěte integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Použijte křivku  $C_R$  složenou z intervalů  $[-R, -1/R]$ ,  $[1/R, R]$  a půlkružnic  $z = Re^{it}$ ,  $t \in [0, \pi)$  a  $z = e^{it}/R$ ,  $t \in [0, \pi)$  – tato poslední půlkružnice opačně orientovaná.



### LEKCE36-KRZ

singulární bod
izolovaná
singularita
odstranitelná singularita
pól
podstatná
singularita
jednoduchý pól
Pickardova věta
reziduum
reziduová věta
<b>STANDARDY</b>
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Spočítejte

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a \sin x + a^2}$$

pro  $0 \leq a \leq 1$ .

**Příklad.** Spočítejte rezidua pro následující funkci:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}.$$

**Řešení.** Z předpisu funkce je vidět, že  $f$  má singularity v bodech 1 a -1. A sice v bodě 1 je pól řádu 1 a v bodě -1 je pól řádu 2.

Hodnotu rezidua v bodě 1 spočítáme podle vzorce

$$\operatorname{res}_1 f = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z),$$

což je po dosazení

$$\operatorname{res}_1 f = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Hodnotu rezidua v bodě -1 spočítáme podle vzorce

$$\operatorname{res}_{-1} f = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left( (z+1)^k f(z) \right).$$

Tedy,

$$\operatorname{res}_{-1} f = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left( (z+1)^2 \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right) = -\frac{1}{4}.$$

**LEKCE36-KRZ**

singulární bod

izolovaná

singularita

odstranitelná singularita

pól

podstatná

singularita

jednoduchý pól

Pickardova věta

reziduum

reziduová věta

**STANDARDY**

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Vypočítejte integrál

$$\int_{\varphi} \frac{dz}{1+z^4},$$

kde  $\varphi$  je záporně orientovaná kružnice  $\{z \in \mathbb{C} : |z-1|=1\}$ .

**Řešení.** K výpočtu integrálu použijeme reziduovou větu. Funkce

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$$

má singularitu v bodech

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4},$$

$$z_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4},$$

$$z_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4},$$

$$z_4 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4},$$

což jsou póly prvního řádu.

Zajímají nás ale pouze body  $z_1, z_4$ , protože pouze ty leží ve vnitřku  $\varphi$ . Rezidua v těchto pólech mají hodnoty

$$\operatorname{res}_{z_1} f = \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{res}_{z_4} f = \frac{1}{(z_4-z_2)(z_4-z_3)(z_4-z_1)} = \frac{-1+i}{4\sqrt{2}}.$$

**LEKCE36-KRZ**  
singulární bod  
izolovaná  
singularita  
odstranitelná singularita  
pól  
podstatná  
singularita  
jednoduchý pól  
Pickardova věta  
reziduum  
reziduová věta  
**STANDARDY**  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle reziduové věty je proto integrál roven

$$\int_{\varphi} \frac{dz}{1+z^4} = -2\pi i (\operatorname{res}_{z_1} f + \operatorname{res}_{z_4} f) = -2\pi i \frac{-2}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$$

**Příklad.** Spočítejte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta.$$

**Řešení.** Provedeme substituci  $z = e^{i\theta}$ , po níž bude

$$\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \cos 3\theta = \frac{z^3 + z^{-3}}{2}, \quad dz = iz d\theta.$$

Dostaneme tak

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = \int_C \frac{\frac{z^3+z^{-3}}{2}}{5 - 4\frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{2i} \int_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)} dz,$$

kde  $C$  je kladně orientovaná jednotková kružnice se středem v počátku.

Integrand má ve vnitřku této kružnice dvě singularity: pól 3. řádu v 0 a jednoduchý pól v  $1/2$ .

Rezidua v těchto bodech mají hodnoty

$$\operatorname{res}_0 f = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \frac{z^3(z^6 + 1)}{z^3(2z - 1)(z - 2)} = \frac{21}{8},$$

$$\operatorname{res}_{1/2} f = \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{(z - 1/2)(z^6 + 1)}{z^3(2z - 1)(z - 2)} = -\frac{65}{24}$$

**LEKCE36-KRZ**  
singulární bod  
izolovaná  
singularita  
odstranitelná singu-  
larita  
pól  
podstatná  
singularita  
jednoduchý pól  
Pickardova věta  
reziduum  
reziduová věta  
**STANDARDY**  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A hledaný integrál je:

$$-\frac{1}{2i} \int_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)} dz = -\frac{1}{2i} 2\pi i \left( \frac{21}{8} - \frac{65}{24} \right) = \frac{\pi}{12}.$$

**Příklad.** Spočítejte integrál

$$\int_C \frac{dz}{z^{10} + 1},$$

kde  $C$  je kladně orientovaná kružnice se středem v nule a poloměrem 2.

**Řešení.** Integrand má deset singularit na obvodu jednotkové kružnice, které samozřejmě leží ve vnitřku kružnice  $C$ . Kdybychom chtěli integrál počítat jako v předchozích příkladech pomocí reziduové věty, museli bychom spočítat hodnoty reziduí ve všech těchto bodech, což by bylo poněkud pracné.

Uvědomíme si ale, že nepotřebujeme znát jednotlivá rezidua, nýbrž jejich součet, který je (až na znaménko) roven hodnotě rezidua v nekonečnu.

Pro  $|z| > 1$  je

$$\frac{1}{z^{10} + 1} = \frac{1}{z^{10}} \frac{1}{1 + z^{-10}} = \frac{1}{z^{10}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-10n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{-10n}.$$

Takže reziduum integrandu v nekonečnu je 0, a tedy i hledaný integrál má hodnotu 0.

LEKCE36-KRZ

singulární bod

izolovaná

singularita

odstranitelná singularita

pól

podstatná

singularita

jednoduchý pól

Pickardova věta

reziduum

reziduová věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9