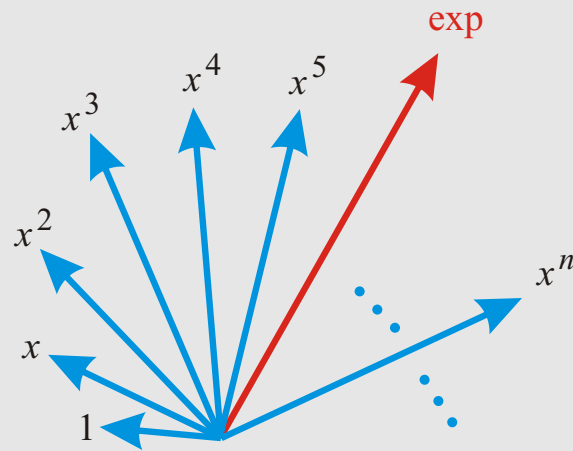


# FOURIEROVY ŘADY

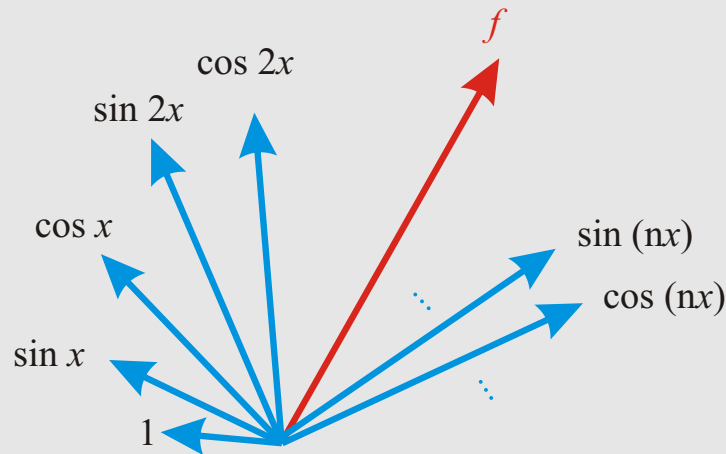
Funkce exp má známý zápis

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

pro nějaké  $c$  mezi 0 a  $x$ .



<b>LEKCE27-FOR</b>
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech
hladká funkce
Fourier.koefficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
<b>STANDARDY</b>
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Polynomy jsou velmi vhodné funkce pro aproximace, ale ne vždy je možné je použít anebo ne vždy mají potřebné vlastnosti.

Navíc se dobře aproximovaly jen funkce, mající všechny derivace.

Další funkce, které se ukázaly velmi vhodné pro aproximace jsou funkce sinus a kosinus. Pomocí nich lze aproximovat i nespojitě funkce.

Navíc jsou tyto funkce vhodné pro modelování periodických dějů a není tu požadavek, aby aproximované funkce měly derivace všech řádů.

Protože sinus je lichá a kosinus sudá funkce, musí se pro aproximaci použít obě funkce současně.

Je také známo, že mocniny obou funkcí se dají vždy vyjádřit pomocí lineárních kombinací funkcí  $\sin(kx)$ ,  $\cos(kx)$ . Např.  $\sin^2 x = 1/2 - (1/2) \cos(2x)$ ,  $\cos^3 x = (3/4) \cos x + (1/4) \cos(3x)$ .

**LEKCE27-FOR**

- trig. polynom
- trig. řada
- ortogonalita
- po částech hladká funkce
- Fourier. koeficienty
- Fourier. řada
- F. koef.  $\rightarrow 0$
- konvergence
- Parseval
- integrace
- derivace
- jiné periody
- Fourier. integrál
- STANDARDY**
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Používání funkcí  $\sin(kx)$ ,  $\cos(kx)$  je vhodnější než používání funkcí  $\sin^k x$ ,  $\cos^k x$ . Důvody jsou podloženy i obecnou teorií, která je však nad rámec tohoto textu.

**DEFINICE.** Funkce  $\sum_{n=0}^k (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  se nazývá **trigonometrický polynom**.

Řada  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  se nazývá **trigonometrická řada**.

Koeficienty  $a_n$ ,  $b_n$  i proměnná  $x$  lze brát komplexní, tento text se omezí jen na reálná čísla.

Protože trigonometrický polynom má periodu  $2\pi$ , není možné bez úpravy aproximovat funkce, které nemají tuto periodu.

Pro funkce s periodou  $2\pi$  je jedno na jakém intervalu délky  $2\pi$  se funkce zkoumá. V dalším textu je brán interval  $[-\pi, \pi]$ , který je symetrický kolem 0. Často se bere interval  $[0, 2\pi]$ .

Pro výpočet koeficientů  $a_n$ ,  $b_n$  se využije tzv. ortogonality funkcí  $\sin(nx)$ ,  $\cos(nx)$ :

**VĚTA.** Platí následující rovnosti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx = 0 \text{ pro libovolná } n, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx = \begin{cases} 0, & \text{pro } n \neq k; \\ \pi, & \text{pro } n = k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx = \begin{cases} 0, & \text{pro } n \neq k; \\ \pi, & \text{pro } n = k \in \mathbb{N}; \\ 2\pi, & \text{pro } n = k = 0. \end{cases}$$

**LEKCE27-FOR**

- trig.polynom
- trig.řada
- ortogonalita
- po částech
- hladká funkce
- Fourier.koeficienty
- Fourier.řada
- F.koef.->0
- konvergence
- Parseval
- integrace
- derivace
- jiné periody
- Fourier.integrál
- STANDARDY**
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vrať me se zpět k rovnosti  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ .

Obě strany rovnosti se vynásobí  $\sin(kx)$  (nebo  $\cos(kx)$ ) a zintegrují se.

Pokud řada konverguje stejnoměrně, lze přehodit integrál a součet a použít orthogonality:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \sin kx dx = \pi b_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \cos kx dx = \begin{cases} \pi a_k, & \text{pro } k \neq 0; \\ 2\pi a_0, & \text{pro } k = 0. \end{cases}$$

Uvedené integrály obecně nemusí existovat. Budou existovat pro spojitě omezené funkce.

Pro použití Fourierových řad je však třeba pracovat i s nespojitými funkcemi. Obecná teorie připouští značné nespojitosti, tento text se omezí na jednodušší funkce, pro které stačí zobecněný Newtonův integrál a znalosti dosud probrané.

Funkce na  $[-\pi, \pi]$  se nazývá **po částech hladká**, jestliže existuje rozdělení  $-\pi = p_0 < p_1 < \dots < p_n = \pi$  takové, že  $f$  má na každém intervalu  $[p_{i-1}, p_i]$  spojitou derivaci.

Periodická funkce  $f$  s periodou  $2\pi$  se nazývá po částech hladká, jestliže zúžení  $f$  na  $[-\pi, \pi]$  (nebo jiný uzavřený interval délky  $2\pi$ ) je po částech hladké.

**DEFINICE.** Necht'  $f$  je funkce definovaná na  $(-\pi, \pi)$ .

Čísla

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots$$

#### LEKCE27-FOR

trig.polynom  
trig.řada  
ortogonalita  
po částech hladká  
funkce  
Fourier.koeficienty  
Fourier.řada  
F.koef.->0  
konvergence  
Parseval  
integrace  
derivace  
jiné periody  
Fourier.integrál  
STANDARDY  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \text{ pro } n = 1, 2, \dots$$

se nazývají **Fourierovy koeficienty** funkce  $f$ .

Řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

se nazývá **Fourierova řada** funkce  $f$ .

Fourierova řada existuje pro po částech hladké funkce.

**POZOROVÁNÍ.** Jsou-li  $a_n, b_n$  (nebo  $a'_n, b'_n$ ) Fourierovy koeficienty funkce  $f$  (resp.  $g$ ), pak  $\alpha a_n + \beta a'_n, \alpha b_n + \beta b'_n$  jsou Fourierovy koeficienty funkce  $\alpha f + \beta g$ .

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

Cvičení 1 Učení 1

**LEKCE27-FOR**  
 trig.polynom  
 trig.řada  
 ortogonalita  
 po částech hladká  
 funkce  
 Fourier.koeficienty  
 Fourier.řada  
 F.koef.->0  
 konvergence  
 Parseval  
 integrace  
 derivace  
 jiné periody  
 Fourier.integrál  
**STANDARDY**  
 Poznámky  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9  
 Příklady  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9  
 Otázky  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9  
 Cvičení  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9  
 Učení  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

# KONVERGENCE FOURIEROVY ŘADY

Pro aplikace není ani tak důležitá samotná konvergence Fourierovy řady, jako její konvergence k původní funkci.

Je to problém obtížný, ale důležitý. Pro tento text stačí uvést jednodušší výsledky.

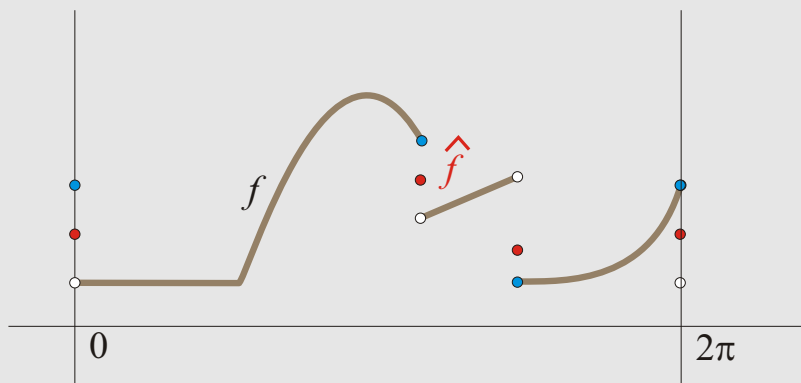
**LEMMA.** Necht'  $f$  je po částech hladká v  $[-\pi, \pi]$ . Pak Fourierovy koeficienty funkce  $f$  konvergují k 0.

V následujícím textu se bude kvůli stručnějším zápisům značit

$$f(a_+) = \lim_{x \rightarrow a_+} f(x), \quad f(a_-) = \lim_{x \rightarrow a_-} f(x) \quad \hat{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-)).$$

Protože  $f$  je buď periodická nebo se periodicky dodefinovává, znamená  $f(-\pi_-)$  totéž co  $f(\pi_-)$ , apod.  $f(-\pi_+) = f(\pi_+)$ .

Pro po částech hladké funkce  $f$  je  $\hat{f}$  definovaná všude a souhlasí s  $f$  právě v bodech spojitosti  $f$ .



**LEKCE27-FOR**

- trig.polynom
- trig.řada
- ortogonalita
- po částech hladká funkce
- Fourier.koeficienty
- Fourier.řada
- F.koef.->0
- konvergence
- Parseval
- integrace
- derivace
- jiné periody
- Fourier.integrál
- STANDARDY**
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Necht'  $f$  je po částech hladká na  $[-\pi, \pi]$ . Pak její Fourierova řada konverguje k funkci  $\widehat{f}$  v každém bodě  $p \in [-\pi, \pi]$  (a tedy k  $f(p)$  v bodech spojitosti funkce  $f$ ).

Konvergence je stejnoměrná na intervalu ležícím uvnitř intervalu, kde má  $f$  spojitou derivaci.

**VĚTA. (Parseval)** Necht'  $f$  je definovaná na  $[-\pi, \pi]$  a  $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$  konverguje. Pak

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

kde  $a_n, b_n$  jsou Fourierovy koeficienty funkce  $f$ .

**VĚTA. (Parseval)** Necht'  $f, g$  jsou definované na  $(0, 2\pi)$  a  $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \int_{-\pi}^{\pi} g^2(x) dx$  konvergují. Pak

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx = \frac{a_0a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n a'_n + b_n b'_n),$$

kde  $a_n, b_n$  (nebo  $a'_n, b'_n$ ) jsou Fourierovy koeficienty funkce  $f$  (resp.  $g$ ).

Poznámky 2   Příklady 2   Otázky 2

**LEKCE27-FOR**  
trig.polynom  
trig.řada  
ortogonalita  
po částech hladká  
funkce  
Fourier.koeficienty  
Fourier.řada  
F.koef.->0  
konvergence  
Parseval  
integrace  
derivate  
jiné periody  
Fourier.integrál  
**STANDARDY**  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# DERIVACE A INTEGRACE FOURIEROVÝCH ŘAD

**VĚTA.** Necht'  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  je Fourierova řada funkce  $f$  na  $[-\pi, \pi]$ , pro kterou konverguje  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$ .

Pak pro libovolný interval  $(a, b) \subset [0, 2\pi]$  platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_a^b (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) dx \right),$$

a uvedená řada integrálů konverguje stejnoměrně.

Uvedené vyjádření primitivní funkce  $F(x)$  není ovšem Fourierovou řadou pokud  $a_0 \neq 0$ :

$$F(x) = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin(nx) - b_n (\cos(nx) - 1)}{n}.$$

Aby se dostala Fourierova řada, musí se funkce  $x$  nahradit její Fourierovou řadou (viz *Příklady*).

Pokud se zvolí periodické rozšíření funkce  $x$  z  $[-\pi, \pi)$  a dosadí se do předchozího vzorce, dostane se (řady konvergují absolutně a lze je tedy vhodně přehazovat)

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos(nx) + (a_n - (-1)^n a_0) \sin(nx)}{n}.$$

**LEKCE27-FOR**  
trig.polynom  
trig.řada  
ortogonalita  
po částech hladká  
funkce  
Fourier.koefficienty  
Fourier.řada  
F.koef.->0  
konvergence  
Parseval  
integrace  
derivace  
jiné periody  
Fourier.integrál  
**STANDARDY**  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Důsledkem rovnosti je absolutní konvergence řady  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/n$ , jakmile konverguje  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$ .

Derivace Fourierovy řady nemusí být Fourierovou řadou žádné funkce (viz *Příklady*).

**VĚTA.** Necht'  $f$  je po částech hladká funkce na  $[-\pi, \pi]$ , jejíž derivace je absolutně integrovatelná a  $a_n, b_n$  jsou Fourierovy koeficienty funkce  $f$ . Pak Fourierovy koeficienty  $a'_n, b'_n$  funkce  $f'$  se dají vyjádřit následovně:

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} f(2\pi) - f(0), \quad a_n = (-1)^n a'_0 + n b_n, \quad b'_n = -n a_n.$$

**DŮSLEDEK.** Necht'  $f$  je spojitá funkce s periodou  $2\pi$ , po částech hladká, jejíž derivace je absolutně integrovatelná. Pak Fourierova řada pro  $f'$  se získá z Fourierovy řady pro  $f$  derivací člen po členu a je rovna

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos(nx) - a_n \sin(nx)).$$

[Poznámky 3](#) [Příklady 3](#) [Otázky 3](#)

[Cvičení 3](#) [Učení 3](#)

#### LEKCE27-FOR

[trig.polynom](#)  
[trig.řada](#)  
[ortogonalita](#)  
[po částech hladká](#)  
[funkce](#)  
[Fourier.koeficienty](#)  
[Fourier.řada](#)  
[F.koef.->0](#)  
[konvergence](#)  
[Parseval](#)  
[integrace](#)  
[derivace](#)  
[jiné periody](#)  
[Fourier.integrál](#)  
**STANDARDY**  
[Poznámky](#)  
[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)  
[Příklady](#)  
[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)  
[Otázky](#)  
[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)  
[Cvičení](#)  
[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)  
[Učení](#)  
[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)

# PERIODY JINÉ DÉLKY NEŽ $2\pi$

Předchozí úvahy se snadno přenesou na periodické funkce s periodou  $2l$ .

Místo funkcí  $\cos(nx)$ ,  $\sin(nx)$  stačí vzít funkce  $\cos(\pi nx/l)$ ,  $\sin(\pi nx/l)$ , které mají periodu  $2l$ .

Fourierovy koeficienty jsou pak definovány jako

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos(\pi nx/l) dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin(\pi nx/l) dx.$$

Fourierova řada funkce  $f$  je řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos(\pi nx/l) + b_n \sin(\pi nx/l) \right).$$

Příklady 4   Otázky 4

Cvičení 4

- LEKCE27-FOR**
- trig.polynom
- trig.řada
- ortogonalita
- po částech   hladká
- funkce
- Fourier.koeficienty
- Fourier.řada
- F.koef.->0
- konvergence
- Parseval
- integrace
- derivace
- jiné periody
- Fourier.integrál
- STANDARDY**
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

# \* FOURIERŮV INTEGRÁL

Dají se rozvinout ve vhodné řady Fourierova typu i funkce neperiodické, aniž by se upravovaly?

Ukazuje se, že jsou dvě základní možnosti. Buď lze použít jinou soustavu funkcí než trigonometrické funkce (o tom je zmínka v *Poznámkách* nebo se místo řad použije integrál.

Protože tento druhý způsob se bude hodit v pozdějších kapitolách, bude nyní vyložen.

V této části je  $f$  funkce definovaná na  $\mathbb{R}$ , je po částech hladká a  $\int_{\mathbb{R}} |f|$  konverguje. (Pojem *po částech hladká funkce* bude nyní interpretován tak, že je to funkce po částech hladká (v dříve definovaném smyslu) v každém omezeném intervalu.)

Připomeňte si, že  $\hat{f}$  je funkce definovaná rovností  $\hat{f}(x) = (f(x_-) + f(x_+))/2$ .

Pro každé  $k \in \mathbb{N}$  lze  $f$  vyjádřit pomocí Fourierovy řady na intervalu  $[-k, k]$  (za Fourierovy koeficienty jsou tu dosazeny jejich vyjádření pomocí definice):

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \frac{1}{2k} \int_{-k}^k f(t) dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} \int_{-k}^k f(t) \cos(\pi n t / k) \cos(\pi n x / k) dt + \frac{1}{k} \int_{-k}^k f(t) \sin(\pi n t / k) \sin(\pi n x / k) dt \right) \\ &= \frac{1}{2k} \int_{-k}^k f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{-k}^k f(t) \left( \cos(\pi n t / k) \cos(\pi n x / k) + \sin(\pi n t / k) \sin(\pi n x / k) \right) dt \\ &= \frac{1}{2k} \int_{-k}^k f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{-k}^k f(t) \cos\left(\frac{\pi n}{k}(x - t)\right) dt.\end{aligned}$$

<b>LEKCE27-FOR</b>
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parsěval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
<b>STANDARDY</b>
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvedená rovnost platí na libovolně velkých intervalech  $[-k, k]$  a lze se pokusit pravou stranu zlimitit pro  $k \rightarrow \infty$ .

Z předpokladu konečnosti integrálu  $\int_{\mathbb{R}} f$  vyplývá, že  $\lim_k \frac{1}{2k} \int_{-k}^k f(t) dt = 0$ .

Položí se  $g(u) = \int_{-k}^k f(t) \cos(u(x-t)) dt$ ; potom je zbývající výraz roven

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{k} g\left(\frac{n\pi}{k}\right),$$

což připomíná Riemannovy součty funkce  $g$  a dá se tedy očekávat, že jejich limita bude rovna  $(1/\pi) \int_0^{\infty} g(u) du$ .

To se dá opravdu dokázat: pro  $\varepsilon > 0$  se najde  $n_0$  tak, že pro  $n > n_0$  je rozdíl mezi uvedeným integrálem a předchozím součtem roven nejvýše  $\varepsilon$ .

**VĚTA.** Necht'  $f$  je po částech hladká na  $\mathbb{R}$  a  $\int_{\mathbb{R}} |f|$  konverguje. Potom platí rovnost

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(u(x-t)) dt du.$$

Integrál na pravé straně se nazývá **Fourierův integrál** funkce  $f$ .

Jestliže se  $\cos(u(x-t))$  rozepíše pomocí součtového vzorce, dostane se obdoba Fourierových řad:

**VĚTA.** Necht'  $f$  je po částech hladká na  $\mathbb{R}$  a  $\int_{\mathbb{R}} |f|$  konverguje. Potom

$$\widehat{f}(x) = \int_0^{\infty} (A(u) \cos(ux) + B(u) \sin(ux)) du$$

#### LEKCE27-FOR

trig. polynom	
trig. řada	
ortogonalita	
po částech hladká	
funkce	
Fourier. koeficienty	
Fourier. řada	
F. koef. $\rightarrow 0$	
konvergence	
Parseval	
integrace	
derivace	
jiné periody	
Fourier. integrál	
<b>STANDARDY</b>	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

kde

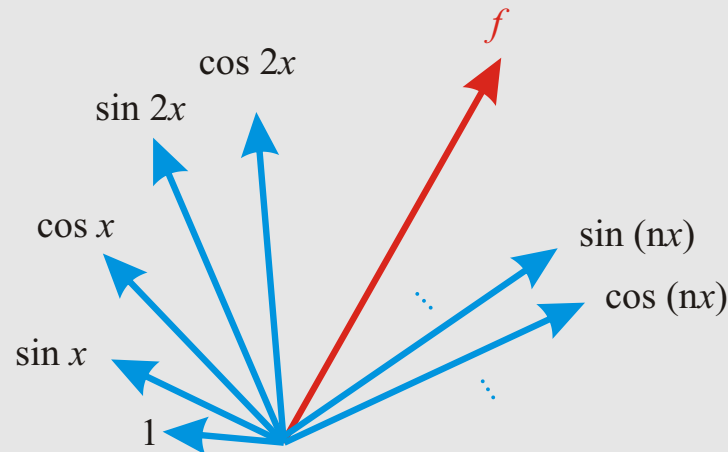
$$A(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(ux) \, dx, \quad B(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(ux) \, dx.$$

K Fourierovému integrálu se tento text opět vrátí v kapitole o Fourierově transformaci.

[Poznámky 5](#) [Příklady 5](#) [Otázky 5](#)

STANDARDY z kapitoly

FOURIEROVY ŘADY



**LEKCE27-FOR**  
trig.polynom  
trig.řada  
ortogonalita  
po částech hladká  
funkce  
Fourier.koefficienty  
Fourier.řada  
F.koef.->0  
konvergence  
Parseval  
integrace  
derivace  
jiné periody  
Fourier.integrál  
**STANDARDY**  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DEFINICE.** Funkce  $\sum_{n=0}^k (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  se nazývá **trigonometrický polynom**.

Řada  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  se nazývá **trigonometrická řada**.

Koeficienty  $a_n, b_n$  i proměnná  $x$  lze brát komplexní, tento text se omezí jen na reálná čísla.

Pro výpočet koeficientů  $a_n, b_n$  se využije tzv. ortogonality funkcí  $\sin(nx), \cos(nx)$ :

**VĚTA.** Platí následující rovnosti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx = 0 \text{ pro libovolná } n, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx = \begin{cases} 0, & \text{pro } n \neq k; \\ \pi, & \text{pro } n = k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx = \begin{cases} 0, & \text{pro } n \neq k; \\ \pi, & \text{pro } n = k \in \mathbb{N}; \\ 2\pi, & \text{pro } n = k = 0. \end{cases}$$

Vraťme se zpět k rovnosti  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ .

Obě strany rovnosti se vynásobí  $\sin(kx)$  (nebo  $\cos(kx)$ ) a zintegrují se.

Pokud řada konverguje stejnoměrně, lze přehodit integrál a součet a použít ortogonalitu:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \sin kx dx = \pi b_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

**LEKCE27-FOR**  
trig.polynom  
trig.řada  
ortogonalita  
po částech hladká  
funkce  
Fourier.koeficienty  
Fourier.řada  
F.koef.->0  
konvergence  
Parseval  
integrace  
derivace  
jiné periody  
Fourier.integrál  
**STANDARDY**  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \cos kx dx = \begin{cases} \pi a_k, & \text{pro } k \neq 0; \\ 2\pi a_0, & \text{pro } k = 0. \end{cases}$$

Funkce na  $[-\pi, \pi]$  se nazývá **po částech hladká**, jestliže existuje rozdělení  $-\pi = p_0 < p_1 < \dots < p_n = \pi$  takové, že  $f$  má na každém intervalu  $[p_{i-1}, p_i]$  spojitou derivaci.

Periodická funkce  $f$  s periodou  $2\pi$  se nazývá po částech hladká, jestliže zúžení  $f$  na  $[-\pi, \pi]$  (nebo jiný uzavřený interval délky  $2\pi$ ) je po částech hladké.

**DEFINICE.** Necht'  $f$  je funkce definovaná na  $(-\pi, \pi)$ .

Čísla

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \text{ pro } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \text{ pro } n = 1, 2, \dots$$

se nazývají **Fourierovy koeficienty** funkce  $f$ .

Řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

se nazývá **Fourierova řada** funkce  $f$ .

Fourierova řada existuje pro po částech hladké funkce.

**Příklad.** Najděte Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{pro } x \in (-\pi, 0); \\ 0, & \text{pro } x = 0 \text{ a } x = \pi; \\ 1, & \text{pro } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

**LEKCE27-FOR**  
trig.polynom  
trig.řada  
ortogonalita  
po částech hladká  
funkce  
Fourier.koeficienty  
Fourier.řada  
F.koef.->0  
konvergence  
Parseval  
integrace  
derivace  
jiné periody  
Fourier.integrál  
**STANDARDY**  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

dodefinované periodicky na  $\mathbb{R}$ .

**Příklad.** Najděte Fourierovy řady následujících funkcí dodefinovaných periodicky na  $\mathbb{R}$ :

$$x \text{ na } [-\pi, \pi), \quad x \text{ na } [0, 2\pi), \quad |x| \text{ na } [-\pi, \pi), \quad |\sin x| \text{ na } [-\pi, \pi).$$

**Příklad.** Najděte Fourierovu sinovou i kosinovou řadu funkcí

$$\sin x \text{ na } [0, \pi), \quad x \text{ na } [0, \pi).$$

**Příklad.** Je-li  $f$  lichá, jsou všechny koeficienty  $a_n$  rovny 0 a Fourierova řada bude složena jen z funkcí sinus.

**Příklad.** Je-li  $f$  sudá, jsou všechny koeficienty  $b_n$  rovny 0 a Fourierova řada bude složena jen z funkcí kosinus.

## LEKCE27-FOR

trig.polynom

trig.řada

ortogonalita

po částech hladká

funkce

Fourier.koeficienty

Fourier.řada

F.koef.->0

konvergence

Parseval

integrace

derivace

jiné periody

Fourier.integrál

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



# KONVERGENCE FOURIEROVY ŘADY

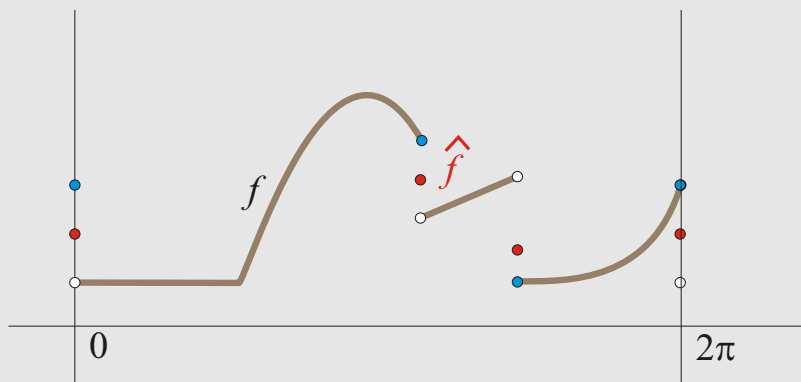
**LEMMA.** Necht'  $f$  je po částech hladká v  $[-\pi, \pi]$ . Pak Fourierovy koeficienty funkce  $f$  konvergují k 0.

V následujícím textu se bude kvůli stručnějším zápisům značit

$$f(a_+) = \lim_{x \rightarrow a_+} f(x), \quad f(a_-) = \lim_{x \rightarrow a_-} f(x) \quad \hat{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-)).$$

Protože  $f$  je buď periodická nebo se periodicky dodefinovává, znamená  $f(-\pi_-)$  totéž co  $f(\pi_-)$ , apod.  $f(-\pi_+) = f(\pi_+)$ .

Pro po částech hladké funkce  $f$  je  $\hat{f}$  definovaná všude a souhlasí s  $f$  právě v bodech spjitosti  $f$ .



**LEKCE27-FOR**  
trig.polynom  
trig.řada  
ortogonalita  
po částech hladká  
funkce  
Fourier.koeficienty  
Fourier.řada  
F.koef.->0  
konvergence  
Parseval  
integrace  
derivace  
jiné periody  
Fourier.integrál  
**STANDARDY**  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Necht'  $f$  je po částech hladká na  $[-\pi, \pi]$ . Pak její Fourierova řada konverguje k funkci  $\widehat{f}$  v každém bodě  $p \in [-\pi, \pi]$  (a tedy k  $f(p)$  v bodech spojitosti funkce  $f$ ).

Konvergence je stejnoměrná na intervalu ležícím uvnitř intervalu, kde má  $f$  spojitou derivaci.

**VĚTA. (Parseval)** Necht'  $f$  je definovaná na  $[-\pi, \pi]$  a  $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$  konverguje. Pak

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

kde  $a_n, b_n$  jsou Fourierovy koeficienty funkce  $f$ .

**VĚTA.** Je-li  $f$  po částech monotónní v  $(-\pi, \pi)$  a má tam jen konečně mnoho bodů nespojitosti, konverguje její Fourierova řada k funkci  $\widehat{f}$ .

<b>LEKCE27-FOR</b>
trig.polynom
trig.řada
ortogonalita
po částech hladká
funkce
Fourier.koeficienty
Fourier.řada
F.koef.->0
konvergence
Parseval
integrace
derivace
jiné periody
Fourier.integrál
<b>STANDARDY</b>
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# DERIVACE A INTEGRACE FOURIEROVÝCH ŘAD

**VĚTA.** Necht'  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  je Fourierova řada funkce  $f$  na  $[-\pi, \pi]$ , pro kterou konverguje  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$ .

Pak pro libovolný interval  $(a, b) \subset [0, 2\pi]$  platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_a^b (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) dx \right),$$

a uvedená řada integrálů konverguje stejnoměrně.

Uvedené vyjádření primitivní funkce  $F(x)$  není ovšem Fourierovou řadou pokud  $a_0 \neq 0$ :

$$F(x) = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin(nx) - b_n (\cos(nx) - 1)}{n}.$$

Aby se dostala Fourierova řada, musí se funkce  $x$  nahradit její Fourierovou řadou.

**Příklad.** Najděte rozvoj funkce  $x \mapsto x^3$  na intervalu  $(-\pi, \pi)$ . Využijte znalost rozvoje  $x \mapsto x$  a  $x \mapsto x^2$  a integrace Fourierových řad.

**Řešení.** Již máme spočteno, že

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

**LEKCE27-FOR**  
trig.polynom  
trig.řada  
ortogonalita  
po částech hladká  
funkce  
Fourier.koefficienty  
Fourier.řada  
F.koef.->0  
konvergence  
Parseval  
integrace  
derivace  
jiné periody  
Fourier.integrál  
**STANDARDY**  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Integrujme nyní tuto řadu  $\int_0^x dt$ .

Potom

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\pi^2x = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx.$$

Teď použijeme rozvoj

$$x = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx.$$

Z předchozích rovností již snadno dostaneme

$$x^3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{(-1)^{n-1}2\pi^2}{n} + \frac{(-1)^n12}{n^3} \right) \sin nx.$$

Tato řada konverguje bodově na  $(-\pi, \pi)$ .

#### LEKCE27-FOR

trig. polynom

trig. řada

ortogonalita

po částech hladká

funkce

Fourier. koeficienty

Fourier. řada

F. koef.  $\rightarrow 0$

konvergence

Parseval

integrace

derivace

jiné periody

Fourier. integrál

**STANDARDY**

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9