

STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

Zatím nebylo v těchto textech věnováno příliš pozornosti konvergenci funkcí, ať jako limita posloupnosti nebo součet řady.

Jinak byla konvergence posloupnosti funkcí nebo řady brána jako bodová konvergence.

To je samozřejmě základní pojem konvergence, ale v mnoha případech je příliš obecný a nestačí na dokazování některých užitečných tvrzení.

LEKCE25-RAF

bodová konvergence

stejněměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniiova věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konvergence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POSLOUPNOSTI A ŘADY FUNKCÍ

Před uvedením různých konvergencí posloupností nebo řad funkcí je vhodné rozvést některé základní pojmy definované dříve.

Není nutné se soustředit jen na funkce jedné proměnné a ani na reálné funkce.

Ale ani není nutné probírat téma v úplně obecnosti.

Zobrazení f z Euklidovského prostoru do Euklidovského prostoru dimenze m je m -tice (f_1, \dots, f_m) funkcí více proměnných s hodnotami v \mathbb{R} .

Protože základní vlastnosti funkce f jsou určeny vlastnostmi funkcí f_i a konvergence v \mathbb{R}^m je konvergence po souřadnicích, stačí probírat případy *reálných funkcí více proměnných* $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a omezit se na $n \leq 2$.

Nicméně, vzhledem k zjednodušení zápisu budou některé pojmy zavedeny nebo probírány obecněji.

DEFINICE. Necht' M je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazení $M \rightarrow \mathbb{R}$. Posloupnost $\{f_n\}$ **konverguje bodově** na M k zobrazení $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, jestliže $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$, tj.

$$\forall \varepsilon \forall x \in M \exists k \in \mathbb{N} \forall n \geq k (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Obvyklé značení je $\lim f_n = f$ nebo $f_n \rightarrow f$.

Bodový součet řady zobrazení se může definovat jako bodová limita posloupnosti částečných součtů řady, nebo rovností $(\sum f_n)(x) = \sum f_n(x)$ (ukážte, že se dostane tentýž pojem).

Jak je obvyklé z teorie řad čísel, i řady funkcí nebo jejich součet se značí $\sum f_n$.

VĚTA. Pro bodovou konvergenci na množině M platí:

LEKCE25-RAF

bodová konvergence

stejněměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniho věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konver-

gence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. $\lim_n (f_n + g_n) = \lim_n f_n + \lim_n g_n$, má-li pravá strana smysl.

2. $\lim_n (f_n g_n) = \lim_n f_n \lim_n g_n$, má-li pravá strana smysl.

3. $\lim_n (f_n / g_n) = \lim_n f_n / \lim_n g_n$, má-li pravá strana smysl.

DŮSLEDEK. $\sum_n (a f_n + b g_n) = a \sum_n f_n + b \sum_n g_n$, má-li pravá strana smysl, kde a, b jsou reálná čísla.

[Poznámky 1](#) [Příklady 1](#) [Otázky 1](#)

LEKCE25-RAF

bodová konvergence
stejněměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniho věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konver-
gence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

Bodová limita posloupnosti spojitých funkcí nemusí být spojitá (například x^n) a jsou i další vlastnosti, které bodová konvergence nemá.

Je proto vhodné přidat nějakou další podmínku na konvergenci, aby se vyloučily ony špatné situace.

Takovou jednoduchou podmínkou je stejnoměrnost konvergence:

DEFINICE. Necht' M je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazení $M \rightarrow \mathbb{R}$. Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na M k zobrazení $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon \exists k \in \mathbb{N} \forall x \in M \forall n \geq k |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Obvyklé značení je $f_n \rightrightarrows f$.

DEFINICE. Řada funkcí $\sum_n f_n$ konverguje na M stejnoměrně k funkci f , jestliže posloupnost částečných součtů $\{\sum_{i=1}^n f_i\}$ konverguje na M stejnoměrně k f .

POZOROVÁNÍ.

1. Konverguje-li posloupnost $\{f_n\}$ k f stejnoměrně na M , konverguje na M k f i bodově.
2. (Bolzanova–Cauchyova podmínka) Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje na M stejnoměrně k nějaké funkci právě když platí:

$$\forall \varepsilon \exists k \in \mathbb{N} \forall x \in M \forall m, n \geq k |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

LEKCE25-RAF

bodová konvergence

stejnoměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniiova věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konver-

gence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

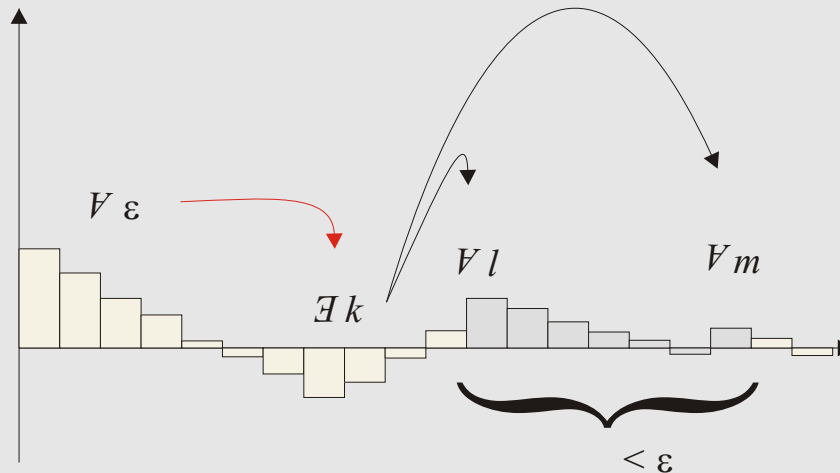
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Řada $\sum_n f_n$ konverguje na M stejnoměrně právě když platí:

$$\forall \varepsilon \exists k \in \mathbb{N} \forall x \in M \left| \sum_{n=k}^{\infty} f_n(x) \right| < \varepsilon.$$

Poslední podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řad lze též přepsat pomocí Bolzanovy–Cauchyovy podmínky:

$$\forall \varepsilon \exists k \in \mathbb{N} \forall x \in M \forall m > l > k \left(\left| \sum_{n=l}^m f_n(x) \right| < \varepsilon \right).$$



LEKCE25-RAF
 bodová konvergence
 stejnoměrná konvergence
 kritéria 1
 kritéria 2
 spojitost
 Diniova věta
 limity
 integrál
 derivace
 mocnná řada
 poloměr konvergence
 deriv., integrace
 Taylorova řada
 Abelova věta
STANDARDY
 Poznámky
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Příklady
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Otázky
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Cvičení
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Učení
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA.

1. Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje na M stejnoměrně k funkci f právě když platí

$$\lim_n \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

2. Jestliže $\sum f_n$ má na M majorantní stejnoměrně konvergentní řadu (tj., existuje stejnoměrně konvergentní řada $\sum g_n$ na M taková, že $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ pro každé n a každé $x \in M$), pak $\sum f_n$ konverguje na M stejnoměrně.

3. Necht' $|f_n(x)| \leq c_n$ pro každé $x \in M$ a $\sum c_n$ konverguje. Pak $\sum f_n$ konverguje na M stejnoměrně.

Poslední podmínka pro stejnoměrnou konvergenci se často nazývá *Weierstrassovo kritérium*.

V kapitole o číselných řadách byly, kromě kritérií pro absolutní konvergenci, dvě další kritéria pro konvergenci, a to **Dirichletovo a Abelovo** (Leibnizovo kritérium je speciální případ Dirichletova kritéria).

VĚTA. Necht' $\{f_n\}, \{g_n\}$ jsou dvě posloupnosti funkcí na intervalu I . Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ konverguje na I stejnoměrně, jestliže $\{f_n\}$ je monotónní a buď

(a) f_n konverguje stejnoměrně k 0, $\{g_n\}$ má stejně omezené částečné součty (**Dirichlet**)
nebo

(b) $\{f_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ konverguje stejnoměrně na I (**Abel**),

LEKCE25-RAF

bodová konvergence
stejnoměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniiova věta

limity

integrál

derivace

mocnná řada

poloměr konver-
gence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. (Leibniz) Necht' $\{f_n\}, \{g_n\}$ je posloupnost nezáporných funkcí na intervalu I . Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n$ konverguje na I stejnoměrně, pokud $\{f_n\}$ je monotónní a f_n konverguje stejnoměrně k 0 na I .

[Poznámky 2](#) [Příklady 2](#) [Otázky 2](#)

LEKCE25-RAF

bodová konvergence

stejnoměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniho věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konvergence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VLASTNOSTI STEJNOMĚRNÉ KONVERGENCE

Přestože lze následující tvrzení o spojitosti a limitách dokázat i pro funkce více proměnných, pro jednoduchost budou v této části uvažovány funkce jedné proměnné, tj. definiční obor M bude podmnožinou reálných čísel.

LEKCE25-RAF

bodová konvergence
stejněměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniho věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konvergence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojítost

VĚTA. Necht' $\{f_n\}$ je posloupnost (stejněměrně) spojitých funkcí na M , která na M konverguje stejnoměrně k funkci f . Potom je f (stejněměrně) spojitá funkce na M .

DŮSLEDEK. Necht' řada $\sum f_n$ (stejněměrně) spojitých funkcí na M konverguje stejnoměrně k funkci f . Potom je f (stejněměrně) spojitá na M .

Existuje situace, kdy lze předchozí větu obrátit.

Monotónní posloupnost funkcí f_n je buď nerostoucí nebo neklesající posloupnost, tj, např. v prvním případě, pro každé x z definičního oboru funkcí f_n je $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$.

VĚTA. (Dini) Necht' posloupnost spojitých funkcí konverguje monotónně ke spojitě funkci na kompaktní množině. Pak je tato konvergence stejnoměrná.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

LEKCE25-RAF
bodová konvergence
stejněměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojítost

Diniova věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konvergence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

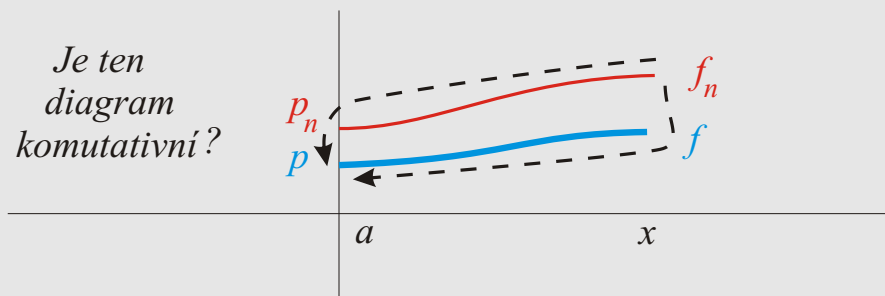
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Stejněměrná konvergence a limity

Pokud $f_n \rightarrow f$ a $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = p_n$, nastává otázka, zda $\lim_n p_n = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, tj., zda lze přehodit limity

$$\lim_n \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_n f_n(x).$$



Jak ukazuje příklad $f_n(x) = x^n$ na $[0, 1]$ a $a = 1$, pro bodovou konvergenci tato záměna limit platit nemusí.

VĚTA. Necht' $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na M , která na M konverguje stejněměrně k funkci f . Pro libovolný hromadný bod a množiny M platí

$$\lim_n \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_n f_n(x),$$

existuje-li pravá strana.

- LEKCE25-RAF
- bodová konvergence
- stejněměrná konvergence
- kritéria 1
- kritéria 2
- spojitost
- Diniiova věta
- limity
- integrál
- derivace
- mocninná řada
- poloměr konvergence
- deriv., integrace
- Taylorova řada
- Abelova věta
- STANDARDY
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Necht' řada $\sum f_n$ spojitých funkcí na M konverguje stejnoměrně. Potom pro libovolný bod $a \in I$ je

$$\sum_n \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_n f_n(x),$$

existuje-li jedna strana.

[Poznámky 4](#) [Příklady 4](#) [Otázky 4](#)

LEKCE25-RAF

bodová konvergence
stejnoměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniiova věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konver-
gence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Stejněměrná konvergence a integrál

Opět se dají najít jednoduché příklady, že nelze přehodit limitu a integraci u bodové konvergence.

VĚTA. Necht' $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na omezeném intervalu I v \mathbb{R} , která na I konverguje stejnoměrně k funkci f . Je-li $\{F_n\}$ posloupnost primitivních funkcí k f_n na I , která konverguje alespoň v jednom bodě z I , pak $\{F_n\}$ konverguje stejnoměrně k primitivní funkci k f na I .

DŮSLEDEK. Necht' $\sum f_n$ je řada funkcí na omezeném intervalu I v \mathbb{R} , která na I konverguje stejnoměrně k funkci f . Jsou-li F_n primitivní funkce k f_n na I takové, že řada $\sum F_n(x)$ konverguje alespoň v jednom bodě x z I , pak $\sum F_n$ konverguje stejnoměrně k primitivní funkci k f na I .

Předchozí větu a její důsledek lze použít pro určité integrály:

VĚTA. Necht' $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na omezeném intervalu I .

1. Jestliže $\{f_n\}$ konverguje na I stejnoměrně k funkci f . Pak pro libovolný interval $[a, b] \subset I$ platí

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_n \int_a^b f_n(x) dx.$$

- LEKCE25-RAF
- bodová konvergence
- stejněměrná konvergence
- kritéria 1
- kritéria 2
- spojitost
- Diniho věta
- limity
- integrál
- derivace
- mocnná řada
- poloměr konvergence
- deriv., integrace
- Taylorova řada
- Abelova věta
- STANDARDY
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Jestliže $\sum f_n$ konverguje na I stejnoměrně k funkci f . Pak pro libovolný interval $[a, b] \subset I$ platí

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_n \int_a^b f_n(x) dx .$$

LEKCE25-RAF

bodová konvergence
stejnoměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniho věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konvergence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Stejněměrná konvergence a derivace

VĚTA. Necht' $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na omezeném intervalu I , která konverguje alespoň v jednom bodě z I a $\{f'_n\}$ konverguje na I stejnoměrně k funkci g . Potom $\{f_n\}$ konverguje na I stejnoměrně k nějaké funkci f a $f' = g$.

[Poznámky 5](#) [Příklady 5](#) [Otázky 5](#)

LEKCE25-RAF

bodová konvergence

stejněměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniiova věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konvergence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

MOCNINNÉ ŘADY

Speciální případ řad funkcí, tzv. mocninné řady, se probíral v kapitole o Taylorových řadách funkcí.

Některé podrobnosti o mocninných řadách budou nyní uvedeny, další budou probrány v kapitolách o komplexních funkcích.

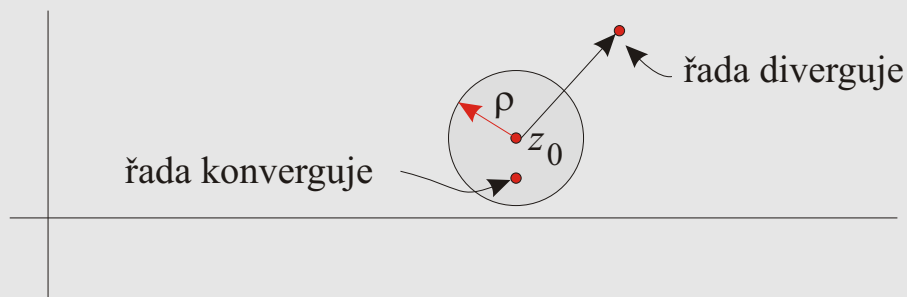
Na rozdíl od probíraných Taylorových řad se obecné mocninné řady budou definovat v rovině (tj., pro komplexní čísla).

DEFINICE. Mocninná řada je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, kde $a_n, z_0, z \in \mathbb{R}^2$.

Bod z_0 se nazývá střed konvergence mocninné řady.

VĚTA. Pro každou mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ existuje číslo $\rho \in [0, +\infty]$ takové, že řada konverguje na množině $\{z; |z - z_0| < \rho\}$ a diverguje na množině $\{z; |z - z_0| > \rho\}$.

Platí $\rho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$.



LEKCE25-RAF

bodová konvergence

stejněměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniiova věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konver-

gence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Číslo ρ z předchozí věty se nazývá **poloměr konvergence** dané mocninné řady.
Z důkazu věty vyplývá následující tvrzení:

DŮSLEDEK. Je-li $q \in (0, \rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, pak tato řada konverguje stejnoměrně a absolutně na množině $\{z; |z - z_0| \leq q\}$.

DŮSLEDEK. Součtem mocninné řady je funkce spojitá na množině $\{z; |z - z_0| < \rho\}$, kde ρ je poloměr konvergence řady.

Protože mocninná řada konverguje stejnoměrně na uzavřených kruzích uvnitř kruhu konvergence, lze použít předchozí věty o integraci a derivaci řad.

VĚTA. Necht' mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ má součet $f(x)$ na intervalu $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady. Potom na intervalu $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ platí

1. $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ a poloměr konvergence této řady je ρ .

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$ je primitivní funkce k f a poloměr konvergence této řady je ρ .

Z druhého tvrzení vyplývá, že pro $(a, b) \subset (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ je

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} ((b - x_0)^{n+1} - (a - x_0)^{n+1}).$$

LEKCE25-RAF
bodová konvergence
stejnomořná konvergence
kritéria 1
kritéria 2
spojitost
Diniiova věta
limity
integrál
derivace
mocninná řada
poloměr konvergence
deriv., integrace
Taylorova řada
Abelova věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Necht' funkce f je na otevřeném intervalu I součtem mocninné řady. Pak f má derivace všech řádů na I .

DŮSLEDEK. Necht' funkce f je na otevřeném intervalu I součtem mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Potom

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

jsou Taylorovy koeficienty funkce f v bodě x_0 .

VĚTA. (Abel) Necht' mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ má součet $f(x)$ na intervalu $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady. Tato mocninná řada konverguje v bodě $x_0 + \rho$ (nebo $x_0 - \rho$) právě když tato mocninná řada konverguje na $[x_0, x_0 + \rho)$ (resp. na $(x_0 - \rho, x_0]$) stejnoměrně.

To nastane právě když konverguje $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$; tento součet se pak rovná $\lim_{x \rightarrow x_0 + \rho^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. (Obdobně pro $-\rho$.)

[Poznámky 6](#) [Příklady 6](#) [Otázky 6](#)

[Cvičení 6](#)

LEKCE25-RAF

[bodová konvergence](#)

[stejnoměrná](#)

[konvergence](#)

[kritéria 1](#)

[kritéria 2](#)

[spojitost](#)

[Diniiova věta](#)

[limity](#)

[integrál](#)

[derivace](#)

[mocninná řada](#)

[poloměr konver-](#)

[gence](#)

[deriv., integrace](#)

[Taylorova řada](#)

[Abelova věta](#)

STANDARDY

[Poznámky](#)

[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)

[Příklady](#)

[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)

[Otázky](#)

[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)

[Cvičení](#)

[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)

[Učení](#)

[1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)

STANDARDY z kapitoly

STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

LEKCE25-RAF

bodová konvergence

stejněoměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniiova věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konver-
gence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POSLOUPNOSTI A ŘADY FUNKCÍ

Zobrazení f z Euklidovského prostoru do Euklidovského prostoru dimenze m je m -tice (f_1, \dots, f_m) funkcí více proměnných s hodnotami v \mathbb{R} .

Protože základní vlastnosti funkce f jsou určeny vlastnostmi funkcí f_i a konvergence v \mathbb{R}^m je konvergence po souřadnicích, stačí probírat případy *reálných funkcí více proměnných* $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a omezit se na $n \leq 2$.

DEFINICE. Necht' M je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazení $M \rightarrow \mathbb{R}$. Posloupnost $\{f_n\}$ **konverguje bodově** na M k zobrazení $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, jestliže $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$, tj.

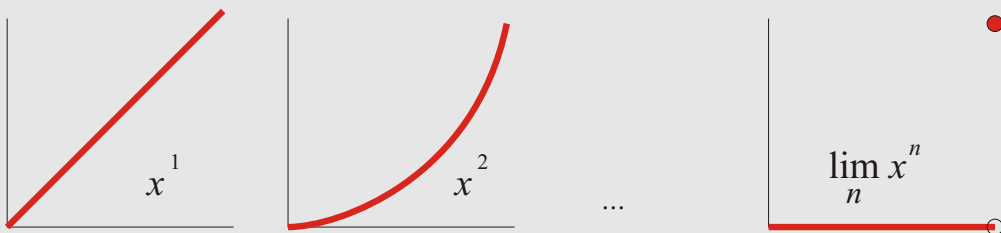
$$\forall \varepsilon \forall x \in M \exists k \in \mathbb{N} \forall n \geq k (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Obvyklé značení je $\lim f_n = f$ nebo $f_n \rightarrow f$.

Bodový součet řady zobrazení se může definovat jako bodová limita posloupnosti částečných součtů řady, nebo rovností $(\sum f_n)(x) = \sum f_n(x)$ (ukážte, že se dostane tentýž pojem).

Jak je obvyklé z teorie řad čísel, i řady funkcí nebo jejich součet se značí $\sum f_n$.

Bodová limita spojitých funkcí $f_n(x) = x^n$ na intervalu $[0, 1]$ není spojitá.



LEKCE25-RAF

bodová konvergence

stejnomořná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniiova věta

limity

integrál

derivace

mocnnná řada

poloměr konver-

gence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Bodovým limitám spojitých funkcí se říká funkce 1. Baireovy třídy. Funkce spojitě jsou formálně 0.třídy.

LEKCE25-RAF

bodová konvergence

stejněměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniho věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konvergence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

DEFINICE. Necht' M je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je f_n zobrazení $M \rightarrow \mathbb{R}$. Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na M k zobrazení $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon \exists k \in \mathbb{N} \forall x \in M \forall n \geq k |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Obvyklé značení je $f_n \Rightarrow f$.

DEFINICE. Řada funkcí $\sum_n f_n$ konverguje na M stejnoměrně k funkci f , jestliže posloupnost částečných součtů $\{\sum_{i=1}^n f_i\}$ konverguje na M stejnoměrně k f .

POZOROVÁNÍ.

1. Konverguje-li posloupnost $\{f_n\}$ k f stejnoměrně na M , konverguje na M k f i bodově.
2. (Bolzanova–Cauchyova podmínka) Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje na M stejnoměrně k nějaké funkci právě když platí:

$$\forall \varepsilon \exists k \in \mathbb{N} \forall x \in M \forall m, n \geq k |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

3. Řada $\sum_n f_n$ konverguje na M stejnoměrně právě když platí:

$$\forall \varepsilon \exists k \in \mathbb{N} \forall x \in M \left| \sum_{n=k}^{\infty} f_n(x) \right| < \varepsilon.$$

LEKCE25-RAF

bodová konvergence

stejnoměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniiova věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konver-

gence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

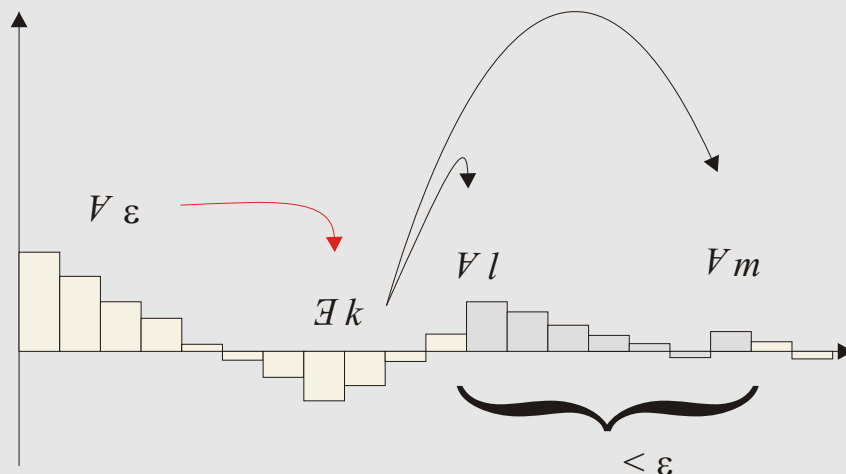
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poslední podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řad lze též přepsat pomocí Bolzanovy–Cauchyovy podmínky:

$$\forall \varepsilon \exists k \in \mathbb{N} \forall x \in M \forall m > l > k \left(\left| \sum_{n=l}^m f_n(x) \right| < \varepsilon \right).$$



VĚTA.

1. (σ_n podmínka.) Označme

$$\sigma_n = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|.$$

Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje na M stejnoměrně k funkci f právě když platí

$$\lim_n \sigma_n = 0.$$

LEKCE25-RAF
 bodová konvergence
 stejnoměrná konvergence
 kritéria 1
 kritéria 2
 spojitost
 Diniova věta
 limity
 integrál
 derivace
 mocnná řada
 poloměr konvergence
 deriv., integrace
 Taylorova řada
 Abelova věta

STANDARDY
 Poznámky
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Příklady
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Otázky
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Cvičení
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Učení
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. (**Majoranta.**) Jestliže $\sum f_n$ má na M majorantní stejnoměrně konvergentní řadu (tj., existuje stejnoměrně konvergentní řada $\sum g_n$ na M taková, že $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ pro každé n a každé $x \in M$), pak $\sum f_n$ konverguje na M stejnoměrně.
3. (**Weierstrass. M-test.**) Necht' $|f_n(x)| \leq c_n$ pro každé $x \in M$ a $\sum c_n$ konverguje. Pak $\sum f_n$ konverguje na M stejnoměrně.

VĚTA. Necht' $\{f_n\}, \{g_n\}$ jsou dvě posloupnosti funkcí na intervalu I . Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ konverguje na I stejnoměrně, jestliže $\{f_n\}$ je monotónní a buď

- (a) f_n konverguje stejnoměrně k 0, $\{g_n\}$ má stejně omezené částečné součty (**Dirichlet**)
nebo
- (b) $\{f_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ konverguje stejnoměrně na I (**Abel**),

DŮSLEDEK. (**Leibniz**) Necht' $\{f_n\}, \{g_n\}$ je posloupnost nezáporných funkcí na intervalu I . Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n$ konverguje na I stejnoměrně, pokud $\{f_n\}$ je monotónní a f_n konverguje stejnoměrně k 0 na I .

LEKCE25-RAF
 bodová konvergence
 stejnoměrná konvergence
 kritéria 1
 kritéria 2
 spojitost
 Diniho věta
 limity
 integrál
 derivace
 mocnná řada
 poloměr konvergence
 deriv., integrace
 Taylorova řada
 Abelova věta
STANDARDY
 Poznámky
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Příklady
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Otázky
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Cvičení
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Učení
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

VLASTNOSTI STEJNOMĚRNÉ KONVERGENCE

LEKCE25-RAF

bodová konvergence

stejněoměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniiova věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konver-
gence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

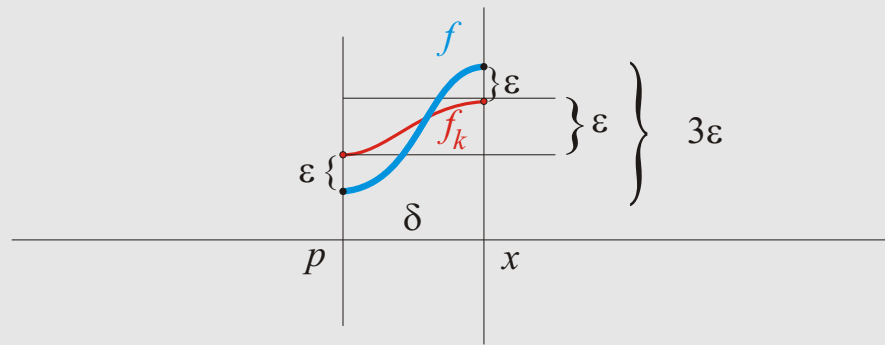
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojítost

VĚTA. Necht' $\{f_n\}$ je posloupnost (stejněměrně) spojitých funkcí na M , která na M konverguje stejnoměrně k funkci f . Potom je f (stejněměrně) spojitá funkce na M .



DŮSLEDEK. Necht' řada $\sum f_n$ (stejněměrně) spojitých funkcí na M konverguje stejnoměrně k funkci f . Potom je f (stejněměrně) spojitá na M .

Pro monotónní funkce lze větu obrátit.

Monotónní posloupnost funkcí f_n je buď nerostoucí nebo neklesající posloupnost, tj, např. v prvním případě, pro každé x z definičního oboru funkcí f_n je $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$.

VĚTA. (Dini) Necht' posloupnost spojitých funkcí konverguje monotónně ke spojitě funkci na kompaktní množině. Pak je tato konvergence stejnoměrná.

LEKCE25-RAF

bodová konvergence

stejněměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniova věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konvergence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

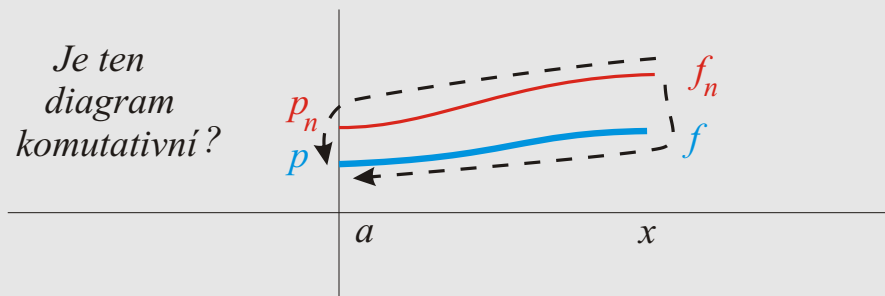
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Stejněměrná konvergence a limity

Pokud $f_n \rightarrow f$ a $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = p_n$, nastává otázka, zda $\lim_n p_n = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, tj., zda lze přehodit limity

$$\lim_n \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_n f_n(x).$$



Jak ukazuje příklad $f_n(x) = x^n$ na $[0, 1]$ a $a = 1$, pro bodovou konvergenci tato záměna limit platit nemusí.

VĚTA. Necht' $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na M , která na M konverguje stejnoměrně k funkci f . Pro libovolný hromadný bod a množiny M platí

$$\lim_n \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_n f_n(x),$$

existuje-li pravá strana.

LEKCE25-RAF

bodová konvergence

stejněměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniho věta

limity

integrál

derivace

mocnná řada

poloměr konvergence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Necht' řada $\sum f_n$ spojitých funkcí na M konverguje stejnoměrně. Potom pro libovolný bod $a \in I$ je

$$\sum_n \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_n f_n(x),$$

existuje-li jedna strana.

LEKCE25-RAF

bodová konvergence
stejnoměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniho věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konvergence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Stejněměrná konvergence a integrál

Opět se dají najít jednoduché příklady, že nelze přehodit limitu a integraci u bodové konvergence.

Například $f_n(x) = (n + 1)x^n$ na $[0, 1)$.

VĚTA. Necht' $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na omezeném intervalu I v \mathbb{R} , která na I konverguje stejnoměrně k funkci f . Je-li $\{F_n\}$ posloupnost primitivních funkcí k f_n na I , která konverguje alespoň v jednom bodě z I , pak $\{F_n\}$ konverguje stejnoměrně k primitivní funkci k f na I .

DŮSLEDEK. Necht' $\sum f_n$ je řada funkcí na omezeném intervalu I v \mathbb{R} , která na I konverguje stejnoměrně k funkci f . Jsou-li F_n primitivní funkce k f_n na I takové, že řada $\sum F_n(x)$ konverguje alespoň v jednom bodě x z I , pak $\sum F_n$ konverguje stejnoměrně k primitivní funkci k f na I .

VĚTA. Necht' $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na omezeném intervalu I .

1. Jestliže $\{f_n\}$ konverguje na I stejnoměrně k funkci f . Pak pro libovolný interval $[a, b] \subset I$ platí

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_n \int_a^b f_n(x) dx .$$

2. Jestliže $\sum f_n$ konverguje na I stejnoměrně k funkci f . Pak pro libovolný interval $[a, b] \subset I$ platí

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_n \int_a^b f_n(x) dx .$$

| |
|-------------------------|
| LEKCE25-RAF |
| bodová konvergence |
| stejněměrná konvergence |
| kritéria 1 |
| kritéria 2 |
| spojitost |
| Diniho věta |
| limity |
| integrál |
| derivace |
| mocninná řada |
| poloměr konvergence |
| deriv., integrace |
| Taylorova řada |
| Abelova věta |
| STANDARDY |
| Poznámky |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

Stejněměrná konvergence a derivace

VĚTA. Necht' $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí na omezeném intervalu I , která konverguje alespoň v jednom bodě z I a $\{f'_n\}$ konverguje na I stejnoměrně k funkci g . Potom $\{f_n\}$ konverguje na I stejnoměrně k nějaké funkci f a $f' = g$.

Příklad. Porovnejte na $[0, 1]$ konvergenci

$$f_n(x) = x^n, \quad g_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad h_n(x) = x^n - x^{2n}.$$

Příklad. (Trik nx .) Pro danou funkci $g(x)$ zkoumejte chování $f_n(x) = g(nx)$.

Příklad. (Trik x/n .) Pro danou funkci $g(x)$ zkoumejte chování $f_n(x) = g(x/n)$.

Příklad. (Trik x^n .) Pro danou funkci $g(x)$ zkoumejte chování $f_n(x) = g(x^n)$.

Příklad. (Trik $\sqrt[n]{x}$.) Pro danou funkci $g(x)$ zkoumejte chování $f_n(x) = g(\sqrt[n]{x})$.

- LEKCE25-RAF**
- bodová konvergence
- stejněměrná konvergence
- kritéria 1
- kritéria 2
- spojitost
- Diniiova věta
- limity
- integrál
- derivace
- mocninná řada
 - poloměr konvergence
 - deriv., integrace
 - Taylorova řada
 - Abelova věta
- STANDARDY**
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

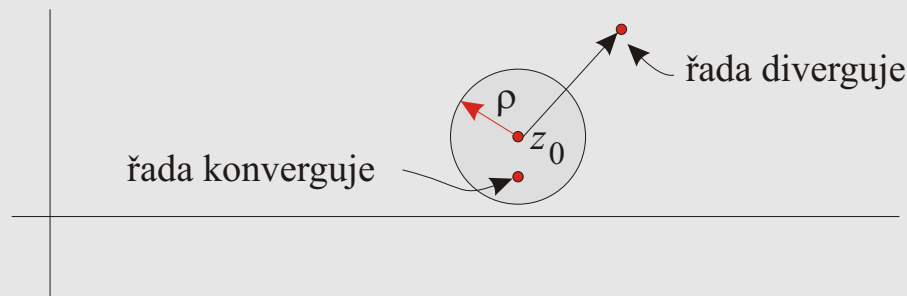
MOCNINNÉ ŘADY

DEFINICE. Mocinná řada je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, kde $a_n, z_0, z \in \mathbb{R}^2$.

Bod z_0 se nazývá střed konvergence mocninné řady.

VĚTA. Pro každou mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ existuje číslo $\rho \in [0, +\infty]$ takové, že řada konverguje na množině $\{z; |z - z_0| < \rho\}$ a diverguje na množině $\{z; |z - z_0| > \rho\}$.

Platí $\rho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$.



Číslo ρ z předchozí věty se nazývá **poloměr konvergence** dané mocninné řady.

DŮSLEDEK. Je-li $q \in (0, \rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, pak tato řada konverguje stejnoměrně a absolutně na množině $\{z; |z - z_0| \leq q\}$.

LEKCE25-RAF

bodová konvergence

stejnomořná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniiova věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konvergence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Součtem mocninné řady je funkce spojitá na množině $\{z; |z - z_0| < \rho\}$, kde ρ je poloměr konvergence řady.

VĚTA. Necht' mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má součet $f(x)$ na intervalu $(x_0-\rho, x_0+\rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady. Potom na intervalu $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ platí

1. $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ a poloměr konvergence této řady je ρ .

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$ je primitivní funkce k f a poloměr konvergence této řady je ρ .

Z druhého tvrzení vyplývá, že pro $(a, b) \subset (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ je

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} ((b-x_0)^{n+1} - (a-x_0)^{n+1}).$$

DŮSLEDEK. Necht' funkce f je na otevřeném intervalu I součtem mocninné řady. Pak f má derivace všech řádů na I .

DŮSLEDEK. Necht' funkce f je na otevřeném intervalu I součtem mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Potom

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

LEKCE25-RAF
bodová konvergence
stejnomořná
konvergence
kritéria 1
kritéria 2
spojitost
Diniiova věta
limity
integrál
derivace
mocninná řada
poloměr konvergence
deriv., integrace
Taylorova řada
Abelova věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

jsou Taylorovy koeficienty funkce f v bodě x_0 .

VĚTA. (Abel) Necht' mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ má součet $f(x)$ na intervalu $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, kde ρ je poloměr konvergence řady. Tato mocninná řada konverguje v bodě $x_0 + \rho$ (nebo $x_0 - \rho$) právě když tato mocninná řada konverguje na $[x_0, x_0 + \rho)$ (resp. na $(x_0 - \rho, x_0]$) stejnoměrně.

To nastane právě když konverguje $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$; tento součet se pak rovná $\lim_{x \rightarrow x_0 + \rho^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. (Obdobně pro $-\rho$.)

Příklad. Pomocí mocninných řad sečtěte (tam, kde to jde)

$$\sum \frac{x^n}{n}.$$

Příklad. Pomocí mocninných řad sečtěte (tam, kde to jde)

$$\sum (n + 1)x^n.$$

Příklad. Najděte Taylorovu řadu $\arctg x$ pomocí rozvoje derivace.

Příklad. Najděte Taylorovu řadu $\log(x + 1)$ pomocí rozvoje derivace. Pomocí Abelovy věty o limitě mocninných řad ukažte, že Taylorův rozvoj funkce $\log(x + 1)$ je platný i pro $x = 1$.

Příklad. Sečtěte následující řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 3}.$$

LEKCE25-RAF
bodová konvergence
stejnoměrná konvergence
kritéria 1
kritéria 2
spojitost
Diniiova věta
limity
integrál
derivace
mocninná řada
poloměr konvergence
deriv., integrace
Taylorova řada
Abelova věta
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řešení. Nejprve si uvědomme, že podle Dirichlet-Abelova kritéria z řada konverguje. Budeme uvažovat řadu

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} x^{2n+3},$$

pro $x \in (0, 1)$.

Derivací této řady získáme řadu

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (x^2)^n,$$

kteřou již snadno sečteme.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (x^2)^n = -1 + x^2 + \frac{1}{1+x^2}$$

Pro primitivní funkce tedy platí rovnost

$$S(x) = -x + \frac{1}{3}x^3 + \arctan x.$$

Podle Abelovy věty je hledaný součet roven limitě

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = -1 + 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Příklad. Spočtěte s přesností 10^{-3} následující integrál

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

LEKCE25-RAF

bodová konvergence
stejněměrná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniiova věta

limity

integrál

derivace

mocnninná řada

poloměr konver-
gence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řešení. Protože neznáme primitivní funkci k e^{-x^2} , využijeme teorie mocninných řad.

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx.$$

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$

Protože například

$$\sum_{n=11}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)n!} \leq \sum_{n=11}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2^{-10} < 10^{-3},$$

dostáváme výsledek

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \doteq \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$

LEKCE25-RAF

bodová konvergence
stejnomořná

konvergence

kritéria 1

kritéria 2

spojitost

Diniiova věta

limity

integrál

derivace

mocninná řada

poloměr konver-
gence

deriv., integrace

Taylorova řada

Abelova věta

STANDARDY

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9