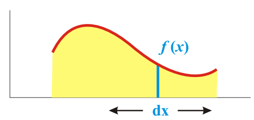
# OBECNÝ URČITÝ INTEGRÁL

Zobecnění Newtonova nebo Riemannova integrálu se definují různým způsobem a dostanou se někdy různé, někdy stejné pojmy.

V tomto textu bude postup volen jako zobecnění Newtonova integrálu, protože je to vhodný postup pro výpočet integrálů.

Nicméně je třeba mít na paměti, že aplikace integrálů se nejlépe chápají přes Riemannovy součty, tj. že integrál funkce $f$ je „součet" hodnot $f(x)$ vynásobených nekonečně malým okolím dx bodu x — viz další kapitolu.

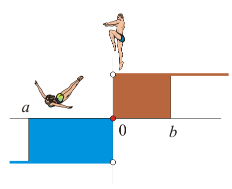



Funkce signum nemá primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$, ale funkce $|x|$ je spojitá a primitivní k signum na $(-\infty, 0)$ i na $(0, +\infty)$.

Vztah

$$\int_a^b \operatorname{sign} t \, \mathrm{dt} = |b| - |a| \,,$$

zřejmě i v tomto případě odpovídá tomu, co se v předchozí části pod integrálem chápalo (např. vyjádření plochy s příslušnými znaménky).




Co je vlastně potřebné pro funkci $F$, aby definice

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{dx} = F(b) - F(a)$$

zobecňovala Newtonův integrál?

Protože se jedná o zobecnění, musí být $F' = f$ na intervalech, kde $F'$ existuje.

Pokud takovýchto funkcí $F$ je více, musí být zaručeno, že se dvě takovéto funkce $F$ liší na daném intervalu o konstantu, podobně, jako tomu je u primitivních funkcí.

# NULOVÉ MNOŽINY

Asi by nemělo smysl, kdyby $F'$ neexistovala na velké množině, např. na nějakém intervalu.

Derivace $F'$ se tedy musí rovnat $f$ všude až na malou množinu.

Jde o to určit vhodně význam malé množiny. Lze pochopit, že konečné množiny jsou malé (vzhledem k intervalům).

Jsou malé i spočetné množiny? To už tak jasné není, protože množina racionálních čísel je spočetná a v jistém smyslu vytváří všechna reálná čísla.

Ukazuje se, že pro účely integrálu jsou malé (vzhledem k intervalům) ty množiny, které se dají pokrýt libovolně malými intervaly:

**DEFINICE.** Množina $C$ reálných čísel se nazývá nulová, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existují intervaly $(a_n, b_n)$ takové, že

1. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \supset C$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$.

Říká se, že vlastnost V platí skoro všude (zkratka s.v.) na nějaké množině $M \subset \mathbb{R}$, jestliže existuje nulová množina $C$ a V platí na $M \setminus C$.

Matematika je skoro všude doma. BTW já jsem asi nulová množina.

**POZOROVÁNÍ.**

1. Každá nejvýše spočetná podmnožina $\mathbb{R}$ je nulová.

2. Podmnožina nulové množiny je nulová množina.
3. Spočetné sjednocení nulových množin je nulová množina.
4. Interval není nulová množina.

Kdo nepozná nulovou množinu, je u mne nula.

Poznámky 1:

Termín *nulová množina* může mít v různých oblastech matematiky různé významy (někdy se tak nazývá prázdná množina). V těchto textech však bude vždy používán pro právě definovaný pojem.

Kdo se později obeznámí s teorií *míry*, pozná, že nulové množiny jsou právě ty podmnožiny $\mathbb{R}$, které mají Lebesguovu míru rovnou nule.

Konec poznámek 1.

Příklady 1:

Cantorova množina je nespočetná nulová množina.

Konec příkladů 1.

Otázky 1:

**1.** Dokažte přímo, že množiny $\mathbb{N}, Q$ jsou nulové.

**2.** Ukažte, že množina iracionálních čísel není nulová.

**3.** Ukažte, že posunutí a násobek nulové množiny jsou opět nulové množiny.

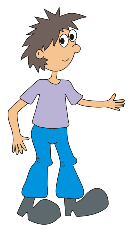
**4.** Je-li $A$ nulová množina, je množina $\mathbb{R} \setminus A$ hustá v $\mathbb{R}$, tj. každý otevřený interval množinu $\mathbb{R} \setminus A$ protíná.

**5.** $\mathbb{R}$ lze vyjádřit jako spočetné sjednocení $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, kde $A_0$ je nulová množina a množiny $\mathbb{R} \setminus A_n$, $n = 1, 2, ...$, jsou otevřené a husté.

Konec otázek 1.

Cvičení 1:

Potřebuje snad tady někdo MALÉ MNOŽINY ?



Já bych si raději vzal větší . . .

Příklad. Sestrojte nekonstantní spojitou funkci na $[0, 1]$, která je co s.v. konstantní.

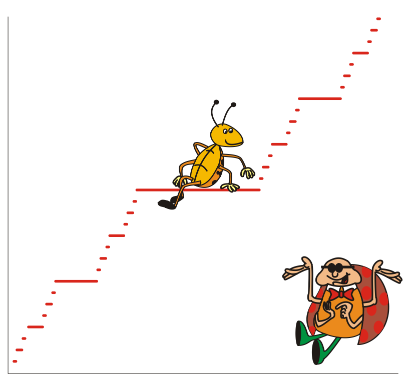
Řešení. Zkusíme najít funkci, která zobrazuje interval $[0, 1]$ na sebe, je přitom spojitá a na mnoha intervalech konstantní.

Bude to takové schodiště. Po částech konstantní funkce by nebyla při konečně mnoha schodech spojitá.

Šlo by udělat schodiště s nekonečně mnoha schody?

Podíváme se na to, co s tím půjde udělat:

Uděláme nejdříve prostřední schod, a potom nalevo a napravo od něj uděláme zase prostřední schod "menšího významu". To celé opakujeme:



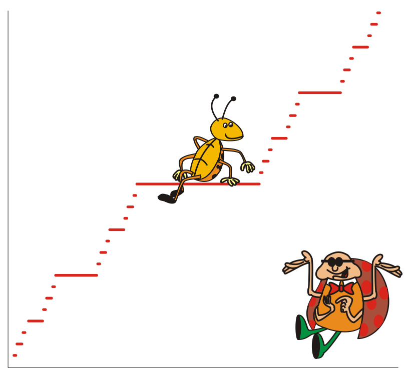
Definujeme tedy funkci $f : [0,1] \to [0,1]$.

Začneme v krajních bodech intervalu: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Pak definujeme $f(x) = 1/2$ pro body "prostřední"třetiny, tedy pro $x \in [1/3, 2/3]$. Přiřadili jsme tedy průměrnou hodnotu z hodnot v krajních bodech intervalu.

Na první a poslední třetině postupujeme podobně, opět použijeme průměrnou hodnotu z hodnot v krajních bodech intervalu.

Postup opakujeme do nekonečna. Tím uděláme nekonečné schodiště. Sjednocení všech takto použitých třetin označíme $T$.



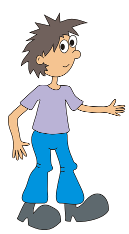
Spočítáme, kolik lina budeme na schodiště potřebovat.

Máme tady jeden největší schod (1/3), dva menší (1/9), čtyři ještě menší (1/27) a tak dál. Sečteme to jako geometrickou řadu

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1\,.$$

Tedy lina budeme potřebovat akorát.

Zapomněli jsme snad v definici na nějaký bod?



Nevidím v našem linu žádnou racionální či iracionální díru.

Pozor, definovali jsme zatím funkci s pouze spočetně mnoho hodnotami!

Tedy nezobrazuje na $[0, 1]$!

Zapomněli jsme asi na spoustu bodů. Najdeme je.

Napíšeme si čísla v $[0, 1]$ pomocí trojkového zápisu.

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3_3} + \cdots$$

Každý bod takto píšeme pomocí posloupnosti $\{a_1, a_2, \ldots\}$. Bod nula odpovídá $\{0, 0, \ldots\}$, bod 1/3 budeme pro jednoznačnost zápisu psát ve tvaru $\{0, 2, 2, 2 \ldots\}$. (Podobně bychom psali v desítkovém zápisu místo jedničky $0,9999 \cdots$.)

Teď pozor ! Přijde kouzlo !!!

Vnitřní body prostřední třetiny (interval $(1/3, 2/3)$) mají ve trojkové soustavě zápis typu $\{0, 1, a_3, \ldots\}$. Vnitřní body dalších intervalů odpovídajících příslušným schodům mají ve svém zápise také jedničku.

Existuje nespočetně mnoho posloupností sestavených pouze z nul a dvojek. Tedy existuje nespočetně mnoho bodů, které nejsou uvnitř našich schodů.

Ale naše schody mají pouze spočetně mnoho krajních bodů. Proto musí být nespočetně mnoho bodů, ve kterých jsme ještě funkci nedefinovali.

Označme $C$ podmnožinu $[0,1]$, jejíž body nemají ve svém trojkovém zápisu jedničku.

$C$ je nespočetná množina.

$C$ je nulová množina. (K danému $\varepsilon > 0$ najdeme schody, na nichž je položeno lino v celkové délce větší $1-\varepsilon$. Pak mezery mezi těmito schody jde pokrýt konečně mnoha otevřenými intervaly o celkové délce menší než $\varepsilon > 0$.)

Množina $C \cap T$ je spočetná.

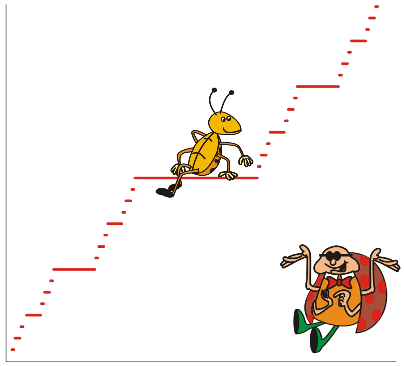
Množině $C$ se říká Cantorova množina.

Vrátíme se k naší funkci. Budeme definovat funkci v bodě $x$ Cantorovy množiny $C$ jako suprémum hodnot funkce na třetinových schodech vlevo od $x$. Tedy

$$f(x) = \sup\{f(t) : \ t \le x \, , \ t \in T\} \, .$$

Takto získáme spojitou funkci, která zobrazuje $[0,1]$ na $[0,1]$. Je konstantní na intervalech obsažených v $T$, jejichž celková délka je $1$.

Této funkci se říká Cantorova funkce. Je to jedna z nejdůležitějších funkcí v teorii integrace:



Všimněme si, že Cantorova funkce roste (o jedničku) na nulové množině.

Příklad. Dokažte, že množina reálných čísel není nulová.

Řešení. Kdyby množina $\mathbb{R}$ byla nulová, pokryjeme ji spočetně mnoha intervaly $I_1, I_2, \dots$ o celkové délce menší než 1. Budeme těmto intervalům říkat modré.

Řekneme, že bod $x \in \mathbb{R}$ je modrý, když interval $[0, x]$ jde pokrýt konečně mnoha modrými intervaly.

Nechť $s$ je suprémum modrých bodů.

Je-li $s$ konečné, dostaneme spor, protože bod $s$ je pokryt intervalem $I_s$, v tomto intervalu musí být nějaký modrý bod a existuje tedy nějaký modrý bod větší než $s$.

Je-li $s = +\infty$, je bod 2 modrý a interval $[0, 2]$ jde pokrýt konečně mnoha intervaly s celkovou délkou menší než 1. Spor

Duch reálných čísel ožil.

Konec cvičení 1.

Učení 1:

Reálnou osu pokryju spočetně mnoha intervaly s délkami menšími než $\varepsilon$. Je to tedy nulová množina?

Zapomněl jsi na sčítání ?

Konec učení 1.

# J-INTEGRÁL

Budeme budovat nový integrál.

## J-PRIMITIVNÍ FUNKCE

Podle předchozího pozorování jsou konečné a spočetné množiny nulové.

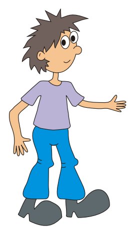
Nespočetné množiny mohou ale nemusejí být nulové.

To naznačuje možnost, že nejvýše spočetné množiny tvoří specifickou třídu nulových množin a že zobecněné primitivní funkce definované na základě této třídy by mohly být také nějak specifické.

Této situaci bude věnována tato sekce.

V předchozím příkladě pro signum by se dostala jiná hodnota integrálu, pokud by místo zobecněné primitivní funkce $|x|$ byla použita např. funkce $|x| + 1$ na $(-\infty, 0)$ a $|x|$ na $(0, +\infty)$.

Tato nevhodná volba se odstraní požadavkem spojitosti zobecněné primitivní funkce.



Ještě že umím lepit.

**DEFINICE.** Funkce $F$ na intervalu $I$ se nazývá J-primitivní funkce k $f$ na $I$, jestliže

1. $F'(x) = f(x)$ na $I$ až na nejvýše spočetnou množinu;
2. $F$ je spojitá na $I$.

Spočetná množina $\{x \in I; F'(x) \neq f(x)\}$ se nazývá výjimečná množina funkce $f$.

Jde o "zobecněný Newtonův integrál".

**POZOROVÁNÍ.**

1. Každá spojitá funkce na intervalu $I$ má na $I$ J-primitivní funkci.
2. Je-li $F$ J-primitivní funkce k $f$ na $I$, má tutéž vlastnost i $F + k$ pro libovolné $k \in \mathbb{R}$.
3. Jsou-li $F, G$ J-primitivní funkce k $f, g$ na $I$, je $\alpha F + \beta G$ J-primitivní funkce k $\alpha f + \beta g$ na $I$.

Pro důkaz tvrzení, že dvě J-primitivní funkce k $f$ se liší o konstantu, nelze použít větu o střední hodnotě, jak tomu bylo u primitivních funkcích.

Následující důkaz je o něco složitější, než by mohl pro danou situaci být, ale byl zvolený tak, aby z něj bylo možné vidět zobecnění na nulovou množinu $C$ místo spočetné množiny.

**VĚTA.** **(Jednoznačnost)** Dvě J–primitivní funkce k $f$ na $I$ se liší o konstantu.

Nejdříve se dokáže následující pomocné tvrzení, které je však důležité i v jiných situacích.

V tvrzení je použit termín *pokrytí* $[a, b]$ *systémem množin* $\mathcal{S}$, což znamená, že sjednocení všech množin z $\mathcal{S}$ obsahuje $[a, b]$.

**LEMMA.** Nechť kompaktní interval $[a, b]$ je pokryt systémem $\mathcal{S}$ otevřených intervalů. Pak existuje konečný podsystém $\{S_1, ..., S_k\}$, který pokrývá $[a, b]$ a $S_i, S_j$ se protínají jen pokud $|i - j| \leq 1$..

**Důkaz.** Označí se $p = \sup\{x \in [a, b]; [a, x]$ lze pokrýt konečným podsystémem systému $\mathcal{S}\}$. Kdyby $p < b$, stačí vzít jednu množinu z $\mathcal{S}$, např. $(r, s)$, obsahující $p$ a potom lze pokrýt konečným podsystémem i interval $[a, q]$ pro $q \in (p, s)$, což je spor.

Lze předpokládat, že získaný podsystém je minimální, tj. po odebrání libovolného jeho prvku zbylý systém už $[a, b]$ nepokrývá.

Nechť se získaný konečný podsoubor skládá z intervalů $S_1, S_2, \ldots, S_k$ se středy $s_1, s_2, \ldots, s_k$ přičemž $s_1 < s_2 < \ldots < s_k$.

Ukažte, že z minimality vyplývá žádaná vlastnost: intervaly $S_i, S_j$ se protínají jedině když $|i - j| \leq 1$.

Jsou to průhledné věcičky. Teď se vrátíme a dokážeme větu o jednoznačnosti.

**Důkaz. věty.** Tvrzení stačí dokázat pro otevřený interval $I = (a, b)$.

Nechť $C$ je spočetná množina bodů $c_n, n = 1, 2, \ldots$ z $(a, b)$, $F$ je spojitá na $(a, b)$ a $F'(x) = 0$ pro $x \in I \backslash C$. Má se dokázat, že $F$ je konstantní na $(a, b)$.

Nechť $r, s \in (a, b), r < s$. Stačí ukázat, že $|F(r) - F(s)|$ je libovolně malé. Buď tedy $\varepsilon > 0$. Může se předpokládat, že $r, s \in C$ (jinak se $C$ o tyto body doplní).

Pro každé $x \in (a, b)$ existuje okolí $U_x = (x - \delta_x, x + \delta_x) \subset (a, b)$ tak, že $|F(y) - F(x)| \leq \varepsilon |y - x|$ pro $y \in U_x$ pokud $x \notin C$ (protože $F'(x) = 0$) a tak, že $|F(y) - F(x)| \leq \varepsilon / 2^n$ pro $y \in U_x$ pokud $x = c_n$ (protože $F$ je v $c_n$ spojitá).

Šikovně jsme si udělali pokrytí.

Podle předchozího lemmatu lze najít body $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ tak, že $\{U_{x_i}\}_1^k$ pokrývá $[r, s]$ a protínají se pouze sousední intervaly.

Pro každé $i$ existuje $y_i \in U_{x_i} \cap U_{x_{i+1}} \cap (x_i, x_{i+1})$, přičemž $y_1$ lze zvolit větší než $r$ a $y_{k-1}$ menší než $s$. Nyní se položí $y_0 = r, y_k = s$ a tedy je $y_i < y_{i+1}$ pro $i = 0, \ldots, k-1$.

Potom

$$|F(r) - F(s)| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |F(y_{i+1}) - F(y_i)| \,.$$

Protože oba sousední body $y_i, y_{i+1}$ leží v $U_{x_i}$ po obou stranách jeho středu (kromě, možná, prvního a posledního intervalu), je $|F(y_{i+1}) - F(y_i)|$ buď nejvýše $\varepsilon(y_{i+1} - y_i)$ pokud $x_i \notin C$ a nejvýše $\varepsilon / 2^n$ pokud $x_i = c_n$.

Odtud vyplývá, že

$$|F(r) - F(s)| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |F(y_{i+1}) - F(y_i)| \leq \varepsilon((s - r) + 2) \,.$$

Které funkce mají J-primitivní funkce a nemají primitivní funkce?

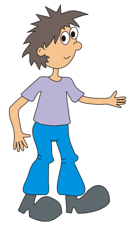
Zřejmě funkce typu signum a jejich posunutí a lineární kombinace (tzv. jednoduché nebo schodovité funkce, mající jen konečně mnoho hodnot, které nabývají na konečně mnoha intervalech).

Následující tvrzení tento případ ještě více zobecní. Jde zde o monotónní funkce:

**VĚTA.** Každá monotónní funkce (a tedy i jejich lineární kombinace) na intervalu $I$ má na tomto intervalu J-primitivní funkci.

**Důkaz.** Nechť $f$ je např. neklesající funkce na $I$ a $C = \{c_n\}$ je spočetná množina jejích bodů nespojitosti (skoků). Označí-li se $s_n$ velikost skoku v bodě $c_n$, pak nezáporná funkce $s$, která má v $x \in I$ hodnotu $\sum\{s_n; c_n < x\}$, se nazývá funkce skoků. Rozdíl $f - s$ je spojitá funkce na $I$, která tedy má primitivní funkci na $I$.
Snadno se zjistí, že $S(x) = \sum\{s_n(x-c_n); c_n < x\}$ je J-primitivní funkce k $s$ na $I$ s výjimečnou množinou $C$. Tedy i funkce $f$ má J-primitivní funkci.

Monotónní funkce mají J-primitivní funkci. Výjimečnou množinou jsou body skoku.



Já si to myslel předem.

Poznámky 2:

**1.** Předpoklad spojitosti u J-primitivní funkce je podstatný. Bez něj nebude platit tvrzení, že dvě zobecněné primitivní funkce k dané funkci se liší o konstantu.

U primitivní funkce spojitost vyplývala z existence derivace, u zobecněné primitivní funkce tomu tak není a spojitost musí být explicitně uvedena.

**2.** Má-li $f$ J-primitivní funkci na $(a, b)$ a změní-li se hodnoty $f$ ve spočetně mnoha bodech, má i tato nová funkce J-primitivní funkci.

**3.** Aby měla funkce J-primitivní funkci, nemusí být definována ve spočetně mnoha bodech. Bývá vhodné pak funkci v těchto bodech dodefinovat, nejlépe hodnotou 0.

**4.** Větu o existenci J-primitivní funkce pro monotónní funkci lze zobecnit. Monotónní funkce mají nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti, které jsou skoky.

Jestliže má nějaká funkce za body nespojitosti jen skoky, lze podobně jako pro monotónní funkce sestrojit J-primitivní funkci.

Funkce, které nemají oscilace, se charakterizují tím, že mají v každém vnitřním bodě definičního intervalu obě jednostranné limity. Takže platí tvrzení:

*Funkce, která má v každém bodě intervalu $(a, b)$ obě jednostranné limity, má na $(a, b)$ J-primitivní funkci.*

Lze dodat, že lineární kombinace monotónních funkcí na kompaktním intervalu jsou tzv. *funkce s konečnou variací* a dají se definovat interně ($f$ je funkce na $[a, b]$):

$$\sup\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|; a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}\,.$$

Na nekompaktním intervalu se funkce s konečnou variací většinou definují lokálně (na každém kompaktním podintervalu mají konečnou variaci).

Konec poznámek 2.

Příklady 2:

**1.** Dirichletova a Riemannova funkce mají nulové J-primitivní funkce.

**2.** Sestrojte J-primitivní funkce k funkci $[x]$ (celá část x) na intervalech $(0, +\infty)$, $(-\infty, 0)$, $(-\infty, +\infty)$.

**3.** Sestrojte J-primitivní funkci k $f$ na $(0, 10)$, kde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & [x] \text{ je sudá;} \\ 1, & [x] \text{ je lichá.} \end{cases}$$

**4.** Sestrojte J-primitivní funkci k $f$ na $(0, 1)$, kde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (1 - 2^{-k}, 1 - 2^{-k-1}), \text{ k sudé;} \\ 1, & x \in (1 - 2^{-k}, 1 - 2^{-k-1}), \text{ k liché.} \end{cases}$$

Konec příkladů 2.

Otázky 2:

Dokažte jednodušeji tvrzení, že dvě J-primitivní funkce k $f$ na $(a, b)$ se liší o konstantu.

Stačí dokázat, že je-li $F$ spojitá na $(a, b)$ a má tam nulovou derivaci všude kromě spočetné množiny, je $F$ neklesající.

Konec otázek 2.

Cvičení 2:

Zkusíme si něco "až na spočetně":

Příklad. Nechť spojitá funkce je rostoucí ve všech bodech až na spočetnou množinu výjimek. Dokažte, že je rostoucí.

Řešení. Nechť $f : [0.1] \to \mathbb{R}$ je spojitá a rostoucí v bodech $[0, 1] \setminus M$, kde $M$ je spočetná množina s prvky $m_1, m_2, \ldots$.

Nechť $f(0) = 0$ a $f(1) = -\varepsilon < 0$. Dokážeme spor.

Bude to chvilku trvat.

Položme $g_1 = f$, $V_1 = \emptyset$. Nechť máme dáno $g_n$ a $V_n$.

Vezmeme bod $m_n$ a najdeme ze spojitosti interval $(a_n, b_n) \subset [0, 1] \setminus V_n$ obsahující $m_n$ tak, že

$$|g_n(a_n) - g_n(b_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2^n}\,.$$

Pak definujeme funkci $g_{n+1}$ takto

$$g_{n+1}(x) = \begin{cases} g_n(x), & x \leq a_n; \\ \text{lineárně}\,, & a_n \leq x \leq b_n; \\ g_n(x) + \frac{\varepsilon}{2^n}, & x \geq b_n. \end{cases}$$

Vpravo od $b_n$ zvednu o konstantu a na $[a_n, b_n]$ doplním lineárně.

Položme $V_{n+1} = V_n \cup [a_n, b_n]$ a matematickou indukcí sestrojíme posloupnost funkcí $\{g_n\}$.

Posloupnost $\{g_n(x)\}$ je od určitého indexu neklesající. Označme její limitu $g(x)$.
Všimneme si, že $g$ je rostoucí v bodech $[0, 1]$ a $g(1) < f(1) + \varepsilon < 0$. To je spor, protože $g(0) = 0$.

Analytik je bez $\varepsilon$ totálně vyřízený.

Konec cvičení 2.

## J-INTEGRÁL

Nyní lze definovat integrál stejným způsobem, jako u Newtonova integrálu.

**DEFINICE.** Nechť jsou splněny následující tři podmínky pro funkci $f$ a interval $I$ s hraničními body $a < b$:

1. funkce $f$ má na $I$ J-primitivní funkci $F$;
2. existují limity $F(a_+), F(b_-)$;
3. rozdíl $F(b_-) - F(a_+)$ má smysl.

Potom se definuje se J-integrál funkce $f$:

$$(J)\int_a^b f\,\mathrm{dx} = F(b_-) - F(a_+)\,.$$

Podobně jako u Newtonova integrálu se definují $(J)\int_a^a = 0\,,\, (J)\int_b^a = -(J)\int_a^b$

Množina všech funkcí, které mají vlastní J-integrál $(J)\int_a^b f\,\mathrm{dx}$, se značí $J(a, b)$. Funkce z $J(a, b)$ se nazývají J-integrovatelné, nebo se říká, že jejich J-integrál konverguje (na rozdíl od termínu *existuje*, kdy může být hodnota integrálu nevlastní).

Ze symbolu pro integrál není vidět na jakém typu intervalu $I$ (např. otevřeném, uzavřeném) je integrál definován. Není to totiž podstatné, protože z definice je vidět, že hodnota integrálu nezávisí na tom, zda koncové body intervalu $I$ náleží do $I$.
V dalším textu bude proto často bez újmy na obecnosti brán otevřený interval $I$.

Výhoda bude vidět hned v následujícím tvrzení.

**VĚTA.** **(Souhrn vlastností J-integrálu)**

1. $N(a,b) \subset J(a,b)$.
2. Pro každou monotónní funkci na $(a,b)$ existuje J-integrál z $f$ na $(a,b)$.
3. $J(a,b)$ je lineární podprostor prostoru všech funkcí na $(a,b)$ a $(J)\int_a^b$je lineární zobrazení $J(a,b)$ do $\mathbb{R}$.
4. (a) Je-li $(c,d) \subset (a,b)$, je $J(a,b) \subset J(c,d)$, kde poslední inkluzí se míní zúžení funkcí.
   (b) Je-li $c \in (a,b)$, je $J(a,b) = J(a,c) \cap J(c,b)$.
5. Je-li $f \in J(a,b)$ je $(J)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ J-primitivní funkce k $f$ na $(a,b)$.
6. Je-li $f$ nezáporná funkce na $(a,b)$ (kromě, možná, spočetné množiny), která tam má J-primitivní funkci, pak existuje $\int_a^b f \geq 0$.
7. Je-li $f \in J(a,b)$, je $(J)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}(J)\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $a \leq a_n \leq b_n \leq b$ a $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$.
8. Nechť $F, G$ jsou J-primitivní funkce k $f, g$ resp., na $(a,b)$. Potom $(J)\int_a^b Fg = [FG]_a^b - (J)\int_a^b fG\,\mathrm{d}x$, jestliže pravá strana má smysl a je vlastní.
9. Nechť $f$ má J-primitivní funkci na intervalu $I$. Nechť existuje spočetná množina $C$ a funkce $\varphi$ tak, že
   - $\varphi$ zobrazuje ryze monotónně $(\alpha,\beta)$ do $I$;
   - $\varphi'$ existuje na $(\alpha,\beta) \setminus C$;

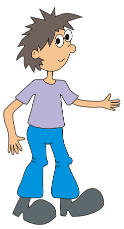
   Potom $(J)\int_{\varphi(\alpha+)}^{\varphi(\beta-)} f(x)\,\mathrm{d}x = (J)\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, je-li jedna strana konečná.

Je to povědomé?

**Důkaz.** Vlastnosti 1 – 5 se dokáží přímo z definic. Pro ověření vlastnosti 6 je nutné si uvědomit, že spojitá funkce, která má nezápornou derivaci všude na intervalu kromě nejvýše spočetné množiny, je neklesající (viz návod v *Otázkách*).
Vlastnosti 7 – 9 se dokazují stejně jako podobné vlastnosti pro Newtonovy integrály. substituce?

**DŮSLEDEK.** Nechť funkce $f, g$ jsou definovány na intervalu $(a,b)$ kromě nejvýše spočetné množiny.

1. $\int_a^b f \leq \int_a^b g$, pokud $f, g \in J(a,b)$, $f(x) \leq g(x)$ na $(a,b)$ kromě nejvýše spočetné množiny;
2. $|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$, pokud $f, |f| \in J(a,b)$.



Ano :-)

Existence J-integrálů a závislost na parametru bude zahrnuta v následující části do zkoumání obecnějších K-integrálů.

Poznámky 3:

**1.** Hodnota Newtonova integrálu nezávisela na hodnotách funkce v krajních bodech.

U J-integrálu je navíc možné změnit hodnoty integrované funkce ve spočetně mnoha bodech, nebo tam funkci nedefinovat vůbec, a hodnota tohoto integrálu se nezmění.

Stačí proto opět celou teorii J-integrálu vysvětlit na otevřených intervalech.

Nicméně, je-li $f$ definována např. na uzavřeném intervalu, je na stejném intervalu definována i J-primitivní funkce (pokud existuje) a její limity v krajních bodech jsou nahrazeny funkčními hodnotami.

To znamená, že existence J-integrálu je v tomto případě ekvivalentní s konvergencí J-integrálu.

Je to podstatná vlastnost a proto je někdy vhodné zdůraznit typ intervalu, na kterém se pracuje.

**2.** Dosti speciálním případem J-integrálu jsou situace, kdy je výjimečná množina konečná.

Tato konečná množina rozděluje základní interval na konečně mnoho disjunktních intervalů a J-integrál přes základní interval je součet Newtonových integrálů přes menší intervaly. Pro přesnou formulaci viz *Otázky*.

To znamená, že nemá velký význam zavádět speciální F-primitivní funkce a F-integrály pro konečné výjimečné množiny.

Předchozí situaci už nelze obecně přenést na spočetné výjimečné množiny. Lze to udělat v případech, kdy výjimečná množina rozděluje základní interval na intervaly.

**3.** Uvědomte si, že 5.vlastnost vyjadřuje J-primitivní fukci pomocí integrálu.

Tj. J-primitivní funkce = neurčitý J-integrál.

**4.** V předchozích Důsledcích chybí obdoba tvrzení z Newtonova integrálu, že $(b-a)\inf f \le \int f \le (b-a)\sup f$. Lze samozřejmě uvést stejné nerovnosti, ale pro J-integrály lze v nerovnostech oslabit infima a suprema – viz *Otázky*.

Konec poznámek 3.

Příklady 3:

**1.** Spočtěte na libovolném intervalu J-integrál Dirichletovy funkce, Riemannovy funkce a funkce signum.

**2.** Spočtěte J-integrály “schodovitých"funkcí uvedených v *Příkladech 2*.

Konec příkladů 3.

Otázky 3:

**1.** Ukažte, že platí následující tvrzení.

*Nechť $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ a funkce $f$ má na každém intervalu $(x_i, x_{i+1})$ primitivní funkci. Pak $f \in J(a,b)$ právě když $f \in N(x_i, x_{i+1}), i = 0, ... n-1$. Dále platí*

$$(J)\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} (N)\int_{x_i}^{x_{i+1}} f\,,$$

*je-li $f \in J(a,b)$.*

**2.** Ukažte, že předchozí tvrzení neplatí pro nevlastní integrály (tj, požaduje-li se místo konvergence jen existence integrálů).

Ukažte, že tvrzení platí i pro spočetně mnoho bodů $a = x_0 < x_1 < ... < x_i < ... < b$, které rozdělují $(a,b)$ na disjunktní intervaly $(x_i, x_{i+1})$ a $(\sup x_i, b)$, pokud je poslední interval neprázdný.

**3.**
Ukažte, že spojitá funkce, která má nezápornou derivaci všude na intervalu kromě nejvýše spočetné množiny, je neklesající.

**4.** Pro funkci $f$ definovanou s.v. na intervalu $(a,b)$ definujte $\sup_\omega\{f(x); x \in (a,b)\} = \inf\{\sup\{f(x); x \in (a,b) \setminus C\}; C$ spočetná množina $\}$ a obdobně $\inf_\omega$.

Ukažte, že pro omezený interval $(a,b)$ platí

$$(b-a)\inf_\omega\{f(x); x \in (a,b)\} \le (J)\int_a^b f \le (b-a)\sup_\omega\{f(x); x \in (a,b)\}\,.$$

Konec otázek 3.

Cvičení 3: Příklad. Zintegrujte schody.

Řešení. Jde o funkci celá část. Položme $f(x) = [x]$ na $[0,\infty)$ a hledejme J-primitivní funkci.

Jde o po částech konstantní funkci $f$, její J-primitivní funkce bude po částech lineární funkce.

Je vidět, že lze psát

$$F(0) = 0, F(1) = 0, F(2) = 1, F(3) = 3, F(4) = 6, F(5) = 10, \ldots\,.$$

Obecně je $F(n) = n(n-1)/2$. Svými hodnotami v celých číslech je $F$ jednoznačně určena.

:-)

Konec cvičení 3.

# K-INTEGRÁL

To bude nejobecnější integrál.

## K-PRIMITIVNÍ FUNKCE

Pro obecnější integrál než je J-integrál, je nejdříve nutné definovat obecnější primitivní funkci, která musí mít opět obvyklé vlastnosti.

V definicích bude místo písmene J použito písmene K podle jména Jaroslav Kurzweil, který okolo r.1955 tento integrál definoval (nezávisle použil stejnou definici a ve stejné době R.Henstock). Oba postupovali pomocí zobecnění Riemannovy metody.

Primitivní funkce byla zobecněna na J-primitivní tím, že se předpokládala existence derivace nikoli všude, ale až na spočetnou množinu.

Další zobecnění je možné zvětšením této spočetné množiny na nulovou množinu.

Jak vidět z příkladu Cantorovy funkce (viz *Otázky*), v tomto případě nestačí předpokládat spojitost zobecněné primitivní funkce (neplatila by totiž základní věta o primitivních funkcích, že dvě zobecněné primitivní funkce k téže funkci se liší o konstantu).

Z důkazu základní věty o J-primitivních funkcích je vidět, co je potřeba, aby podobná věta platila i pro jiné než spočetné výjimečné množiny $C$; potřebná vlastnost je zformulována v následující definici.

**DEFINICE.** Nechť $C$ je podmnožina intervalu $I$. Funkce $F$ definovaná na $I$ se nazývá absolutně spojitá na $I$ okolo $C$, jestliže pro každý interval $[r, s] \subset I$ a libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý konečný soubor disjunktních intervalů $\{(a_n, b_n)\}_1^k$ v $I$ protínajících $C \cap [r, s]$ platí

$$\sum_{n=1}^{k} (b_n - a_n) < \delta \Rightarrow \sum_{n=1}^{k} |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon \,.$$

Jestliže $C = I$, říká se, že $f$ je absolutně spojitá funkce na $I$.

Tady pozor. To není jednoduché. Funkce nesmí mít velké rozdíly v blízkých bodech. A sčítají se !!!

**POZOROVÁNÍ.**

1. Je-li $f$ absolutně spojitá na $I$ okolo množiny $C$, je absolutně spojitá na $I$ okolo každé podmnožiny $C$.
2. Každá spojitá funkce na intervalu $I$ je absolutně spojitá okolo každé spočetné podmnožiny $I$.
3. Absolutně spojitá funkce okolo $C$ je spojitá v každém bodě množiny $C$.
4. Existuje spojitá funkce na $[0,1]$, která není absolutně spojitá (viz *Otázky*).
5. Množina absolutně spojitých funkcí na $(a,b)$ je uzavřená na lineární kombinace, součiny a absolutní hodnoty.

**DEFINICE.** Funkce $F$ na intervalu $I$ se nazývá K–primitivní funkce k $f$ na $I$, jestliže

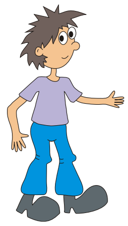
1. $F'(x) = f(x)$ s.v. na $I$;
2. $F$ je absolutně spojitá okolo $\{x \in I; F'(x) \neq f(x)\}$.

Množina $\{x \in I; F'(x) \neq f(x)\}$ se nazývá výjimečná množina funkce $f$.

Jak se dalo čekat.

**POZOROVÁNÍ.**

1. Každá J-primitivní funkce k $f$ na $I$ je K-primitivní funkce k $f$ na $I$.
2. Je-li $F$ K-primitivní funkce k $f$ na $(a,b)$, má tutéž vlastnost i $F + k$ pro libovolné $k \in \mathbb{R}$.
3. Jsou-li $F, G$ K-primitivní funkce k $f, g$ na $(a,b)$, je $\alpha F + \beta G$ K-primitivní funkce k $\alpha f + \beta g$ na $(a,b)$.



Nic jiného jsem nečekal.

Pro korektnost definice integrálu je opět potřeba dokázat, že dvě K-primitivní funkce (k téže funkci) se liší o konstantu.

**VĚTA.** **(Jednoznačnost)** Dvě K-primitivní funkce k $f$ na $I$ se liší o konstantu.

**Důkaz.** je podobný důkazu obdobného tvrzení pro J-primitivní funkce. Nejdříve je nutné si uvědomit, že lze důkaz opět převést na funkce s nulovou derivací. Jestliže $F, G$ jsou dvě K-primitivní funkce k $f$, s výjimečnými množinami $C, D$, pak $F - G$ je absolutně spojitá okolo $C \cup D$ a $(F-G)' = 0$ na $I \setminus (C \cup D)$. Jedině absolutní spojitost $F - G$ okolo $C \cup D$ nemusí být zřejmá. Stačí si však uvědomit, že pokud interval $(a_n, b_n)$ z definice např. neprotíná $D$, pak $G(a_n) = G(b_n)$.

Stačí tedy ukázat, že pokud je $F$ absolutně spojitá okolo nulové množiny $C \subset I$ a $F' = 0$ na $I \setminus C$, je $F$ konstantní na $I$. Zřejmě můžeme opět předpokládat, že $I$ je otevřený interval $(a, b)$.

Nechť $[r, s] \subset (a, b)$ a $\varepsilon > 0$. Pro každé $x \in (a, b)$ existuje okolí $U_x = (x - \delta_x, x + \delta_x) \subset (a, b)$ tak, že $|F(y) - F(x)| \le \varepsilon |y - x|$ pro $y \in U_x$ pokud $x \notin C$ (protože $F'(x) = 0$). Protože $f$ je absolutně spojitá okolo $C$, existuje $\delta > 0$ tak, že platí příslušná vlastnost z definice absolutní spojitosti pro zvolené $\varepsilon$.

Pro nalezené $\delta$ existuje pokrytí $\{(a_n, b_n)\}$ množiny $C$ podintervaly z $(a, b)$ takové, že $\sum (b_n - a_n) < \delta$. Z pokrytí $\{(a_n, b_n)\} \cup \{U_x; x \notin C\}$ intervalu $[r, s]$ se podle pokrývacího lemmatu vybere konečné pokrytí $\{I_i\}_{i=1}^k$.

Stejně jako pro J-primitivní funkce se najdou body $y_0, ..., y_k$ tak, že dva sousední body $y_i, y_{i+1}$ leží v $I_i$. V případě, že $U_i = U_x$ pro nějaké $x \notin C$, je $|F(y_i) - F(y_{i+1})| < \varepsilon(y_{i+1} - y_i)$. Zbývající intervaly $I_{i_l}$ náleží do souboru $\{(a_n, b_n)\}$ a tedy součet $\sum_{i=i_l}(y_{i+1} - y_i) < \delta$. Z absolutní spojitosti vyplývá $\sum_{i=i_l} |F(y_i) - F(y_{i+1})| < \varepsilon$ a tedy dohromady

$$|F(r) - F(s)| \le \sum_{i_l} |F(y_i) - F(y_{i+1})| < \varepsilon(1 + s - r)\,.$$

Poznámky 4:

**1.** Absolutně spojité funkce jsou spojité, ale opak neplatí ani na kompaktním intervalu (tedy pro stejnoměrně spojité funkce).

**2.** Lipschitzovské funkce jsou absolutně spojité (viz *Otázky*).

**3.** Podobně jako pro funkce s konečnou variací platí i zde, že absolutně spojitá funkce lze vyjádřit jako rozdíl dvou neklesajících absolutně spojitých funkcí (a tedy absolutně spojité funkce mají konečnou variaci).

**4.** Lze zopakovat některé poznámky z poznámek k J-primitivním funkcím:

Má-li $f$ K-primitvní funkci na $(a, b)$ a změní-li se hodnoty $f$ na nulové množině, má i tato nová funkce K-primitivní funkci (stejnou množinu K-primitivních funkcí).

Aby měla funkce K-primitivní funkci, nemusí být definována na nulové množině. Bývá vhodné pak funkci v těchto bodech dodefinovat, nejlépe hodnotou 0.

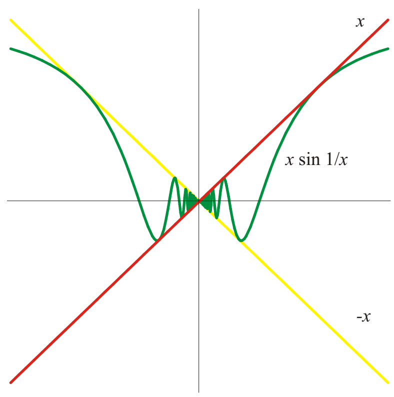
Konec poznámek 4.

Otázky 4:

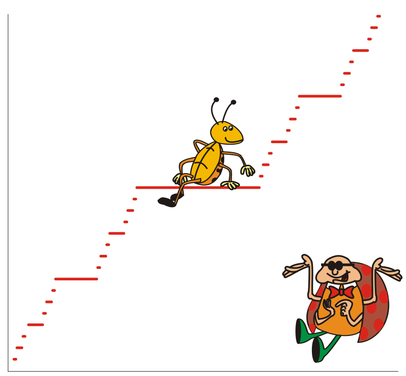
**1.** Ukažte, že spojitá funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1]; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

není absolutně spojitá na $[0, 1]$. (Zkuste ukázat, že podobně definovaná spojitá funkce $x^a \sin \frac{1}{x^b}$, pro $a, b > 0$, je absolutně spojitá na $[0, 1]$ právě když $a > b$.)




**2.** Cantorova funkce na $[0, 1]$ je spojitá a není absolutně spojitá. Její derivace je nulová ve všech bodech kromě bodů Cantorovy množiny.



**3.** Funkce $f$ na intervalu $I$ mající vlastnost $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, pro nějaké číslo $k$ a všechna $x, y \in I$, se nazývá *lipschitzovská*.

Ukažte, že každá lipschitzovská funkce na $I$ je stejnoměrně spojitá.

Funkce mající na $I$ derivaci, je lipschitzovská na $I$ právě když má na $I$ omezenou derivaci.

Ukažte, že lipschitzovská funkce na $I$ je tam absolutně spojitá.

Jestliže se v definici lipschitzovské funkce změní $|x - y|$ na $|x - y|^r$ pro $r > 0$, dostanou se tzv. *hölderovské funkce* řádu $r$, které jsou opět absolutně spojité.

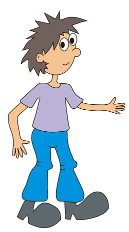
Všimněte si, že hölderovské funkce řádu $r > 1$ jsou konstantní a tedy stačí uvažovat jen $r \in (0, 1]$.

Jaké funkce se dostanou pro $r = 0$?

Konec otázek 4.

Cvičení 4:

Absolutní spojitost je hodna naší pozornosti.

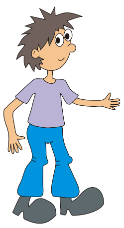


Absolutně souhlasím

**Příklad.** Sestrojte spojitou funkci na intervalu $[0, 1]$, která není absolutně spojitá.

**Řešení.**

Mám chuť stavět stany …



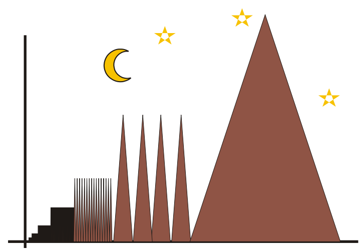
???

Na intervalu $[1/2, 1]$ postavíme 1 stan o výšce 1 pro největšího trempa.

Pak na intervalu $[1/4, 1/2]$ postavíme 4 stany o výšce $1/2$ pro trempské půlčíky.

Pak na intervalu $[1/8, 1/4]$ postavíme 16 stanů o výšce $1/4$ pro trempské čtveráky.

A tak dál . . .

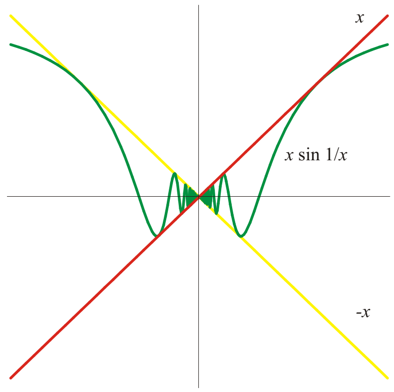


Takto pomocí nekonečně mnoha stanů sestrojená po částech lineární funkce $f$ je spojitá na $[0, 1]$.
Na libovolně malém intervalu u nuly má funkce $f$ délku grafu libovolně velikou.

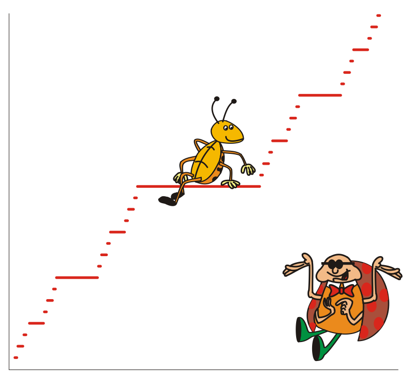
To použijeme k důkazu toho, že funkce $f$ není absolutně spojitá.

Zvolme $\varepsilon = 1$. Pro libovolné $\delta > 0$ zvolíme $n \in \mathbb{N}$ tak, že $2^{-n} < \delta$.
Na intervalu $[2^{-n}/2, 2^{-n}]$ najdeme dvojice bodů $a_m$ (u kolíku stanu) a $b_m$ (na vršku téhož stanu).
Takových dvojic (stanů) najdeme na intervalu $[2^{-n-1}, 2^{-n}]$ tolik (kolik je stanů), že součet příslušných rozdílů $f(b_m) - f(a_m)$ je alespoň $4^n > 1$. Tím je důkaz hotov.

Takové kmitavé funkce získáme z $x^\alpha \sin 1/x^\beta$.




Také stačila Cantorova funkce. Tam dochází k "rychlému růstu"v oblasti "nekonstantnosti".



Konec cvičení 4.

Učení 4:

Funkce $x$ i $|x|$ jsou spojité, tedy funkce $x$ je absolutně spojitá.

Milý pane kolego, máte jazykově pravdu. Definice se prostě nepovedla.

Konec učení 4.

## K-INTEGRÁL

**DEFINICE.** Nechť jsou splněny následující tři podmínky pro funkci $f$ a interval $(a,b)$:

1. funkce $f$ má na $(a,b)$ K-primitivní funkci $F$;
2. existují limity $F(a_+), F(b_-)$;
3. rozdíl $F(b_-) - F(a_+)$ má smysl.

Potom se definuje se K-integrál funkce $f$:

$$(K)\int_a^b f = F(b_-) - F(a_+)\,.$$

Podobně jako u předchozích integrálů se definují $(K)\int_a^a = 0\,,(K)\int_b^a = -(K)\int_a^b$
Množina všech funkcí na intervalu $(a,b)$, které mají vlastní K-integrál, se značí $K(a,b)$ a prvky této množiny se nazývají K-integrovatelné funkce, nebo se říká, že jejich K-integrál konverguje (na rozdíl od termínu *existuje*, kdy může být hodnota integrálu nevlastní).

**VĚTA. (Souhrn vlastností K-integrálu)**

1. $N(a,b) \subset J(a,b) \subset K(a,b)$.
2. $K(a,b)$ je lineární podprostor prostoru všech funkcí na $(a,b)$ a $(K)\int_a^b$je lineární zobrazení $K(a,b)$ do $\mathbb{R}$.
3. (a) Je-li $(c,d) \subset (a,b)$, je $K(a,b) \subset K(c,d)$, kde poslední inkluzí se míní zúžení funkcí.
   (b) Je-li $c \in (a,b)$, je $K(a,b) = K(a,c) \cap K(c,b)$.
4. Je-li $f \in K(a,b)$, je $(K)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ K-primitivní funkce k $f$.
5. Je-li $f$ nezáporná funkce s.v. na $(a,b)$, která tam má K-primitivní funkci, pak existuje $\int_a^b f \geq 0$.
6. Je-li $f \in K(a,b)$, je $(K)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} (K)\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $a \leq a_n \leq b_n \leq b$ a $\lim a_n = a, \lim b_n = b$.
7. Nechť $F, G$ jsou K-primitivní funkce k $f, g$ resp., na $(a,b)$. Potom $(K)\int_a^b Fg = [FG]_a^b - (K)\int_a^b fG\,\mathrm{d}x$, jestliže pravá strana má smysl a je vlastní.
8. Nechť $f$ má K-primitivní funkci na intervalu $I$. Potom $(K)\int_{\varphi(\alpha+)}^{\varphi(\beta-)} f(x)\,\mathrm{d}x = (K)\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, je-li jedna strana konečná a $\varphi$ zobrazuje ryze monotónně $(\alpha,\beta)$ do $I$.

**DŮSLEDEK.** Nechť funkce $f, g$ jsou definovány na intervalu $(a,b)$.

1. $\int_a^b f \leq \int_a^b g$, pokud $f, g \in K(a,b)$, $f(x) \leq g(x)$ s.v. na $(a,b)$;
2. $|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$, pokud $f, |f| \in K(a,b)$.

Poznámky 5:

**1.** Na K-integrál lze přenést většina poznámek týkajících se J-integrálu.

Hlavní je si uvědomit, že lze integrovanou funkci měnit nebo nedefinovat na nulové množině a integrál se nezmění.

**2.** Příklady funkcí z $K(a,b) \setminus J(a,b)$ se v praxi nevyskytují. Všechny příklady tohoto druhu jsou sestrojeny uměle, jako protipříklady.

Z matematického hlediska je ovšem teorie K-integrálu velmi důležitá a zajímavá. Pro aplikace se však vystačí s J-integrály a to ještě s jednoduššími typy výjimečných spočetných množin.

Konec poznámek 5.

Otázky 5:

**1.** Podobně jako u J-integrálů lze i pro K-integrály zesílit odhady integrálů na omezených intervalech:

Pro $A \subset \mathbb{R}$ definujte $\sup_{ess}\{f(x); x \in A\} = \inf\{\sup\{f(x); x \in A \setminus C\}; C$ nulová množina $\}$ a obdobně $\inf_{ess}$.

Ukažte, že pro omezený interval $(a,b)$ platí

$$(b-a)\inf_{ess}\{f(x); x \in (a,b)\} \leq (K)\int_a^b f \leq (b-a)\sup_{ess}\{f(x); x \in (a,b)\}\,.$$

Symbol $\sup_{ess}$ se někdy nazývá *podstatné supremum* (podobně pro infimum) podle anglického slova *essential*.

**2.** Opět je vhodné si uvědomit, že existují spojité funkce $f \in N(a,b)$ (a tedy $f \in K(a,b)$), pro které $|f| \notin N(a,b)$, a tedy $|f| \notin K(a,b)$ (přestože $|f|$ je spojitá a má (K)-primitivní funkci $F$).

Důvod, proč $|f| \notin K(a,b)$ tedy spočívá v nekonečnosti jednoho ze dvou výrazů $F(a_+), F(b_-)$, kde už nehraje roli typ primitivní funkce.

Konec otázek 5.

## KONVERGENCE A EXISTENCE K-INTEGRÁLU

Postup v této části je obdobný jako v příslušné části pro Newtonovy integrály.

Důkazy, které se jen formálně modifikují, jsou nechány k doplnění čtenáři.

**VĚTA.** **(Kritéria konvergence K-integrálu)**

1. (**Srovnávací kritérium**) Nechť $f$ má K-primitivní funkci na $(a,b)$. Jestliže existují $g,h \in K(a,b)$ tak, že $g \le f \le h$ s.v. na $(a,b)$, pak $f \in K(a,b)$.
2. Nechť funkce $g$ je monotónní na $[a,b)$.

   (**Dirichletovo kritérium**) Jestliže $f$ má omezenou K-primitivní funkci na $(a,b)$ a $\lim\limits_{x\to b_-} g(x) = 0$, pak $(K)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

   (**Abelovo kritérium**) Jestliže $f \in K(a,b)$ a $g$ je omezená, pak $fg \in K(a,b)$.

**Důkaz.** 1. Jsou-li $F,G,H$ K-primitivní funkce k $f,g,h$ na $(a,b)$, je $F-G$ neklesající a $F-H$ nerostoucí. Odtud a z existence vlastních limit funkcí $G,H$ v krajních bodech plynou i existence vlastních limit v krajních bodech funkcí $F-G$, $F-H$, a tedy i funkce $F$.

2. Protože $g$ je monotónní, má s.v. derivaci (viz *Otázky*). Jsou tedy splněny předpoklady pro použití integrace per partes:

$$(K)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)g(x)]_a^b - (K)\int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bod $a$ nečiní potíže. Protože je $g$ monotónní a vždy omezená, má v $b$ vlastní limitu.

V případě Dirichletova kritéria je $F$ omezená a $\lim\limits_{x\to b_-} g(x) = 0$ a tedy $\lim\limits_{x\to b_-} F(x)g(x) = 0$.

V případě Abelova kritéria existuje vlastní $\lim\limits_{x\to b_-} F(x)$ a tedy i $\lim\limits_{x\to b_-} F(x)g(x)$.

Zbývá ukázat konvergenci $(K)\int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$. V obou případech je $F$ omezená a tedy $|Fg'| \le K|g'|$ na $[a,b)$. Protože $g$ je monotónní, nemění $g'$ znaménko a $(K)\int_a^b |g'(x)|\,\mathrm{d}x$ konverguje právě když konverguje $(K)\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál se rovná $g(b)-g(a)$.

Následující důsledky (první je důsledkem srovnávacího kritéria, druhý Abelova kritéria) uvádějí ekvivalence pro konvergenci integrálů.

**DŮSLEDEK.**

1. (nelimitní) Nechť nezáporné funkce $f,g$ mají K-primitivní funkce na $[a,b)$. Jestliže existují kladná čísla $K,L$ tak, že na $[a,b)$ platí s.v. $Kf(x) \le g(x) \le Lf(x)$, pak $(K)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě když $(K)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.
2. (limitní) Nechť $f,g$ jsou nezáporné s.v. na $[a,b)$ a mají tam K-primitivní funkce. Jestliže $\lim\limits_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0,\infty)$, pak $(K)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě když $(K)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

**DŮSLEDEK.** Nechť na $[a,b)$ jsou definovány funkce $f,g,h$, přičemž $g(x)/h(x)$ konverguje pro $x \to b_-$ monotónně k nenulovému vlastnímu číslu.Pak $(K)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě když $(K)\int_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

## LEBESGUEŮV INTEGRÁL

Pro K-integrál lze stejně jako pro Newtonův integrál definovat absolutní konvergenci a dokázat stejné základní tvrzení.

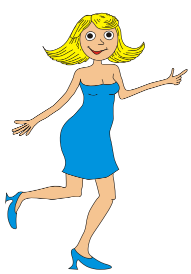
Ukazuje se však, že absolutně konvergentní K-integrály jsou význačné i z jiného hlediska.

**DEFINICE.** K-integrál funkce $f$ na $(a,b)$ konverguje absolutně, jestliže $f$ má na $(a,b)$ K-primitivní funkci a $|f| \in K(a,b)$, a konverguje neabsolutně, jestliže $f \in K(a,b)$ a $|f| \notin K(a,b)$.

**VĚTA.** Absolutně konvergentní K-integrál je konvergentní.

U K-primitivní funkce se může hůře zjišťovat, zda je absolutně spojitá okolo nějaké nulové množiny.

Jednodušší mohou být případy, kdy je K-primitivní funkce absolutně spojitá na celém intervalu $(a,b)$.



V následující definici je písmeno „L" zvoleno podle H.Lebesgua, který L-integrál zavedl začátkem 19.století.

**DEFINICE.** Funkce $F$ se nazývá L-primitivní k $f$ na $(a,b)$, jestliže

1. $F'(x) = f(x)$ s.v. na $(a,b)$;
2. $F$ je absolutně spojitá na $(a,b)$.

Zřejmě je každá L-primitivní funkce i K-primitivní funkcí, ale existují funkce, které mají K-primitivní funkci a nemají L-primitivní funkci.

Podobně jako J-integrál a K-integrál se dá pomocí L-primitivních funkcí definovat L-integrál a příbuzné pojmy. I tento integrál má podobné vlastnosti, jako ty předchozí.

Jak je L-integrál zařazen mezi N-, J- a K-integrály? Na to odpovídá následující důležitá charakterizace:

**VĚTA.** $f \in L(a,b)$ právě když $f, |f| \in K(a,b)$.

**DŮSLEDEK.** $f \in L(a,b)$ právě když $f$ má absolutně konvergentní K-integrál.

Podle předchozího důsledku se Lebesgueův integrál nazývá absolutně konvergentní integrál.

Otázky 7:

Podle posledního tvrzení existují funkce, které mají Newtonův integrál a nemají Lebesgueův integrál, a naopak.

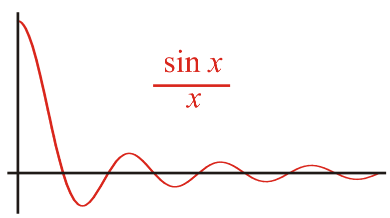
Konec otázek 7.

Cvičení 7:

Příklad. Nalezněte funkci, která má Newtonův integrál a nemá Lebesgueův integrál

Řešení. Budeme hledat funkci, která nemá absolutně konvergentní Newtonův integrál.

Nabízí se funkce $f(x) = \sin x/x$ na intervalu $(0, \infty)$.




Ty kopečky u nekonečna způsobují neabsolutní konvergenci. My je dovedeme "stanovou"technikou udělat i v konečnu.

Konec cvičení 7.