

PRIMITIVNÍ FUNKCE

V předchozích částech byly zkoumány derivace funkcí a hlavním tématem byly funkce, které derivace mají. V této kapitole se budou zkoumat funkce, které naopak jsou derivacemi jiných funkcí a budou se hledat metody, jak tyto jiné funkce najít.

Ukazuje se, že operace inverzní k derivování (nazývaná integrování) je velmi důležitá. Jak už její název napovídá, s její pomocí bude možné z jednotlivých drobných informací získat informaci celkovou.

- Primitivní funkce
 - primitivní funkce
 - jednoznačnost
 - geometrický popis
 - integrály 1
 - integrály 2
 - spojité funkce
 - konstrukce prim.fce
 - výpočet
 - linearita
 - per partes
 - integrály 3
 - substituce speciální
 - substituce obecná
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE A MOTIVACE

Následující termín je historicky vžitý, i když nevyjadřuje příslušnou operaci.

DEFINICE. Funkce F se nazývá **primitivní** k funkci f na intervalu I , jestliže $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in I$.

Následující tvrzení plyne z vět o derivacích (viz [derivace a spojitost](#), [důsledek věty o střední hodnotě](#)).

VĚTA. Nechť F je primitivní funkce k f na I . Potom:

1. F je spojitá na I .
2. Pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ je $F + c$ primitivní funkce k f na I .
3. Je-li G primitivní funkce k f na I , pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že je $G = F + c$.

Pro množinu všech primitivních funkcí k f se používá značení $\int f$, resp. $\int f(x) dx$, je-li třeba zdůraznit proměnnou x .

Znak \int se nazývá **integrál** (přesněji **neurčitý integrál** na rozdíl od *určitého*, který bude zaveden později) a celé označení $\int f(x) dx$ se čte: integrál funkce f (podle proměnné x). Význam znaku dx bude objasněn v *Poznámkách*.

Derivace mají geometrickou interpretaci, popisují tečny ke grafu f . Jak bude vidět z následující části, primitivní funkce popisují velikost plochy pod grafem funkce.

Jestliže f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[a, b]$, má na tomto intervalu primitivní funkci F , jak bude ukázáno [dále](#).

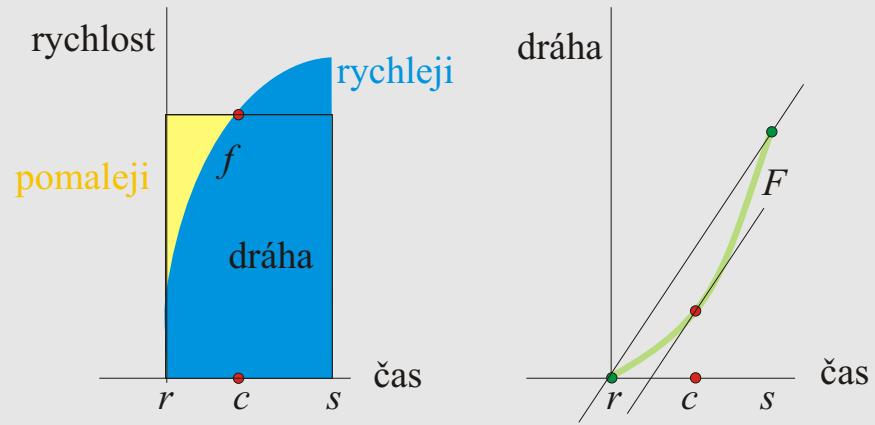
Primitivní funkce
primitivní funkce
jednoznačnost
geometrický popis
integrály 1
integrály 2
spojité funkce
konstrukce prim.fce
výpočet
linearita
per partes
integrály 3
substituce speciální
substituce obecná
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro větší názornost necht' spojitá $f \geq 0$ na $[a, b]$. Zvolíme primitivní funkci F k f na $[a, b]$ tak, že $F(a) = 0$.

Podle **věty o střední hodnotě** použité pro funkci F je pro libovolný interval $[r, s] \subset [a, b]$

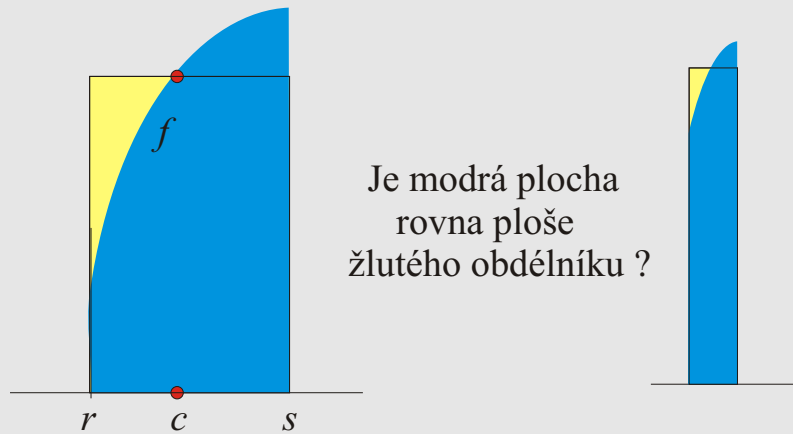
$$F(s) - F(r) = f(c)(s - r)$$

pro nějaké (vhodné) $c \in (r, s)$.



Je-li s velice blízko r , bude i $f(c)$ velice blízko hodnotám $f(r), f(s)$, protože f je spojitá (a uvedený obdélník se nebude příliš lišit od „křivého“ obdélníku s jednou stranou zaměněnou za graf f nad $[r, s]$).

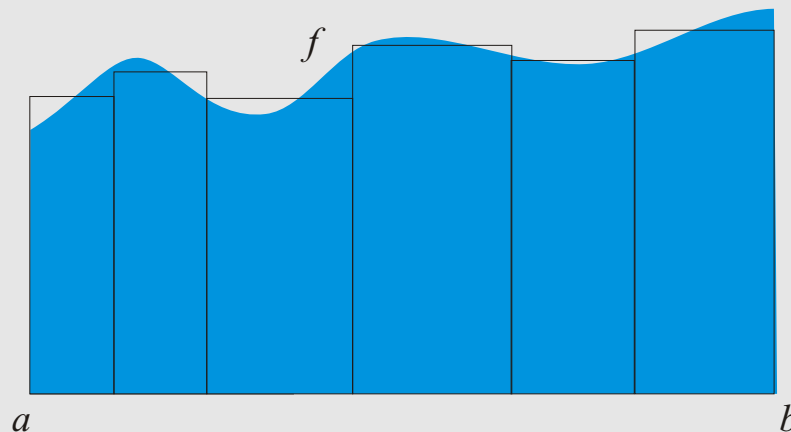
- Primitivní funkce
- primitivní funkce
- jednoznačnost
- geometrický popis
- integrály 1
- integrály 2
- spojité funkce
- konstrukce prim.fce
- výpočet
- linearita
- per partes
- integrály 3
- substituce speciální
- substituce obecná
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Když interval $[a, b]$ rozdělíme na n intervalů body x_1, \dots, x_{n-1} a označíme $x_0 = a, x_n = b$, pak

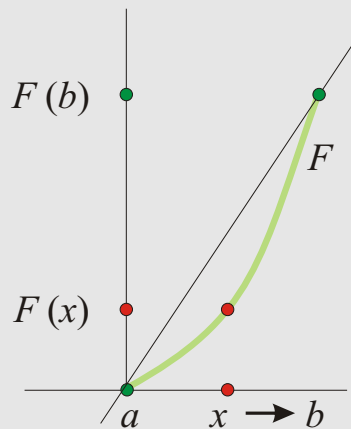
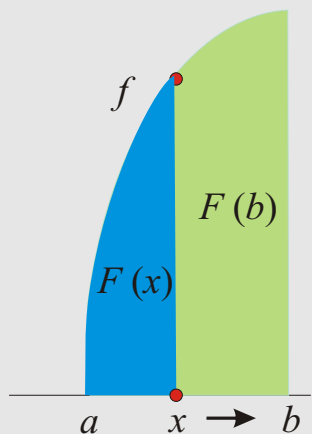
$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) \quad \text{a tedy} \quad F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

pro nějaká $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$.



- Primitivní funkce
- primitivní funkce
- jednoznačnost
- geometrický popis
- integrály 1
- integrály 2
- spojité funkce
- konstrukce prim.fce
- výpočet
- linearita
- per partes
- integrály 3
- substituce speciální
- substituce obecná
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Lze si proto v uvedeném případě představit, že hodnota primitivní funkce F v bodě $x \in [a, b]$ udává velikost plochy mezi osou x a grafem funkce f nad intervalem $[a, x]$.



[Poznámky 1](#) [Příklady 1](#) [Otázky 1](#)

[Cvičení 1](#) [Učení 1](#)

- Primitivní funkce
- [primitivní funkce](#)
- [jednoznačnost](#)
- [geometrický popis](#)
- [integrály 1](#)
- [integrály 2](#)
- [spojité funkce](#)
- [konstrukce prim.fce](#)
- [výpočet](#)
- [linearita](#)
- [per partes](#)
- [integrály 3](#)
- [substituce speciální](#)
- [substituce obecná](#)
- Poznámky
- [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
- Příklady
- [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
- Otázky
- [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
- Cvičení
- [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
- Učení
- [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)

ZÁKLADNÍ NEURČITÉ INTEGRÁLY

Ze znalosti derivací základních funkcí lze najít primitivní funkce k mnoha funkcím. Některé z nich ukazují následující dvě tabulky.

funkce f	interval I	prim.funkce k f na I
$\sin x$	\mathbb{R}	$-\cos x$
$\cos x$	\mathbb{R}	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$(k\pi, \pi + k\pi)$	$-\operatorname{cotg} x$
e^x	\mathbb{R}	e^x
$a^x, a > 0$	\mathbb{R}	$\frac{a^x}{\lg a}$
$\frac{1}{x}$	$(-\infty, 0), (0, +\infty)$	$\lg x $
$x^n, n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	\mathbb{R} nebo $(-\infty, 0), (0, +\infty)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x^a, a \neq -1$	$(0, +\infty)$, někdy \mathbb{R}, \dots	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$

- Primitivní funkce
- primitivní funkce
- jednoznačnost
- geometrický popis
- integrály 1
- integrály 2
- spojité funkce
- konstrukce prim.fce
- výpočet
- linearita
- per partes
- integrály 3
- substituce speciální
- substituce obecná
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

funkce f	interval I	prim.funkce k f na I
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}	$\arctg x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(-\infty, -1), (1, +\infty)$	$\lg x + \sqrt{x^2 - 1} $
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	\mathbb{R}	$\lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$
$\frac{1}{1-x^2}$	$(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$	$\lg \sqrt{\left \frac{x+1}{x-1}\right }$

POZOROVÁNÍ:

Jestliže f má na otevřeném intervalu I derivaci f' , pak

1. součin $f f'$ má na intervalu I primitivní funkci $f^2/2$,
2. podíl f'/f má na I primitivní funkci $\lg |f|$ (pokud na I nenabývá f nulové hodnoty).

Totéž pomocí znaku integrálu:

$$\int f f' = f^2/2, \text{ neboli } \int f(x) f'(x) dx = f^2(x)/2 + C$$

$$\int \frac{f'}{f} = \lg |f|, \text{ neboli } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \lg |f(x)| + C$$

Některé primitivní funkce se dají zjistit z jednoduchých vzorců pro derivace. Následující dvě tabulky uvádějí dva případy.

- Primitivní funkce
- [primitivní funkce](#)
- [jednoznačnost](#)
- [geometrický popis](#)
- [integrály 1](#)
- [integrály 2](#)
- [spojité funkce](#)
- [konstrukce prim.fce](#)
- [výpočet](#)
- [linearita](#)
- [per partes](#)
- [integrály 3](#)
- [substituce speciální](#)
- [substituce obecná](#)
- Poznámky
- [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
- Příklady
- [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
- Otázky
- [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
- Cvičení
- [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
- Učení
- [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)

funkce f	interval I	prim.funkce k f na I
$\sin x \cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$\frac{1}{2} \sin^2 x$
$\frac{\sin x}{\cos^3 x}$	$(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$	$\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x$
$\frac{\lg x}{x}$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{2} \lg^2 x$
$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}$	\mathbb{R}	$\frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x$
$\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$	\mathbb{R}	$\frac{3}{4} \sqrt[3]{(1+x^2)^2}$

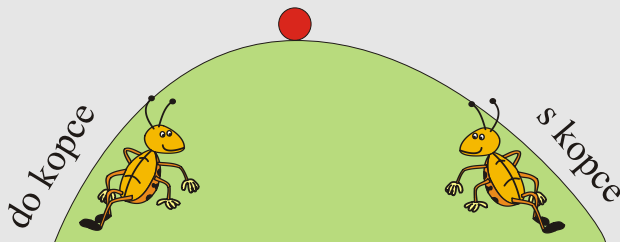
funkce f	interval I	prim.funkce k f na I
$\operatorname{tg} x$	$(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$	$-\lg \cos x $
$\operatorname{cotg} x$	$(k\pi, \pi + k\pi)$	$\lg \sin x $
$\frac{1}{\sin x \cos x}$	$(k\pi/2, \pi/2 + k\pi/2)$	$-\lg \operatorname{tg} x $
$\frac{1}{(x^2+1) \operatorname{arctg} x}$	$(-\infty, 0), (0, +\infty)$	$\lg \operatorname{arctg} x $
$\frac{\sin(2x)}{\sin^2 x + 1}$	\mathbb{R}	$\lg(\sin^2 x + 1)$
$\frac{x}{x^2+1}$	\mathbb{R}	$\lg \sqrt{x^2 + 1}$

Primitivní funkce
 primitivní funkce
 jednoznačnost
 geometrický popis
 integrály 1
 integrály 2
 spojité funkce
 konstrukce prim.fce
 výpočet
 linearita
 per partes
 integrály 3
 substituce speciální
 substituce obecná
 Poznámky
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Příklady
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Otázky
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Cvičení
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Učení
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

PRIMITIVNÍ FUNKCE SPOJITÝCH FUNKCÍ

V předcházejících případech se primitivní funkce uhádly podle známých derivací některých funkcí. Existují metody, pomocí nichž je možné zjistit primitivní funkce aktivněji. Nejdříve je však vhodné si ujasnit, pro které funkce má smysl primitivní funkce hledat.

Má-li funkce všude derivaci a někde ji má kladnou (graf stoupá) a někde zápornou (graf klesá), musí mít lokální extrém s nulovou derivací.



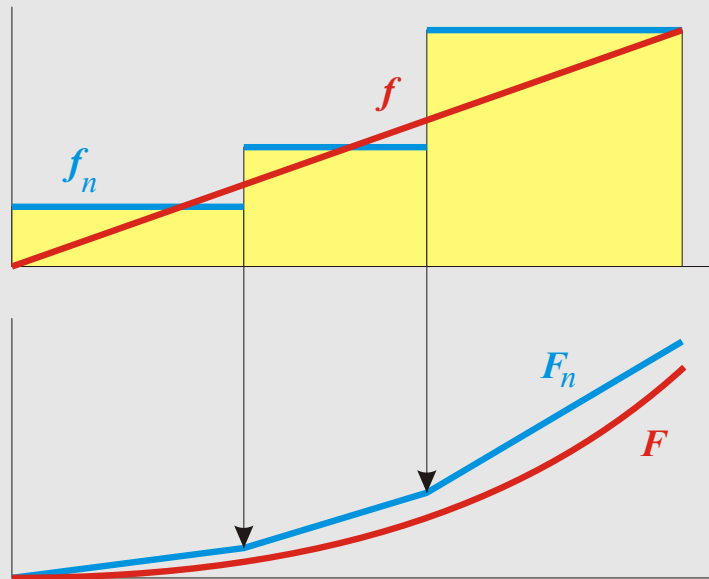
Má-li f na I primitivní funkci, musí mít f na I Darbouxovu vlastnost, tj. musí zobrazovat intervaly z I na intervaly nebo body. (Proč? – viz [Darbouxova vlastnost](#)).

Z kapitoly o spojitých funkcích je známo, že každá spojitá funkce na intervalu má [Darbouxovu vlastnost](#). Mají aspoň tyto speciální funkce s Darbouxovou vlastností primitivní funkce? Odpověď je kladná:

VĚTA. Každá spojitá funkce na intervalu má na tomto intervalu primitivní funkci.

LEMMA. Spojitá funkce na kompaktním intervalu má na tomto intervalu primitivní funkci.

- Primitivní funkce
- primitivní funkce
 - jednoznačnost
 - geometrický popis
 - integrály 1
 - integrály 2
- spojité funkce
 - konstrukce prim.fce
- výpočet
 - linearita
 - per partes
 - integrály 3
 - substituce speciální
 - substituce obecná
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



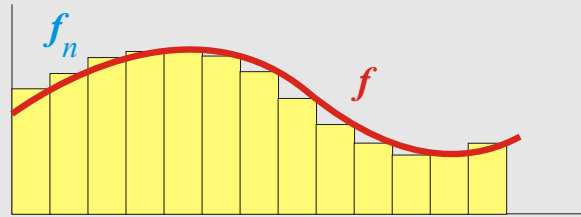
Důkaz. Důkaz bude kvůli jednoduššímu značení proveden na intervalu $[0, 1]$. Necht' f je spojitá na $[0, 1]$.

Hledaná primitivní funkce F bude bodovou limitou posloupnosti funkcí $\{F_n\}$ definovaných takto:

$$F_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{k-1} f\left(\frac{i}{2^n}\right) + f\left(\frac{k}{2^n}\right) \left(x - \frac{k}{2^n}\right),$$

kde k je největší přirozené číslo, pro které je $x \geq \frac{k}{2^n}$ nebo $k = 0$ jinak.

- Primitivní funkce
- primitivní funkce
- jednoznačnost
- geometrický popis
- integrály 1
- integrály 2
- spojité funkce
- konstrukce prim.fce
- výpočet
- linearita
- per partes
- integrály 3
- substituce speciální
- substituce obecná
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



- Primitivní funkce
- primitivní funkce
 - jednoznačnost
 - geometrický popis
 - integrály 1
 - integrály 2
- spojité funkce
 - konstrukce prim.fce
- výpočet
 - linearita
 - per partes
 - integrály 3
 - substituce speciální
 - substituce obecná
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro každé $x \in [0, 1]$ je posloupnost $\{F_n(x)\}$ cauchyovská:
 Necht' $\varepsilon > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ je takové, že pro $|x - y| < 1/2^n$ je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (podle [věty o stejnoměrné spojitosti](#)). Jestliže $m > n$ a i je menší než k příslušné k x v definici F_n , pak z intervalu $[i/2^n, (i+1)/2^n]$ přibude v definici F_m člen $f(i/2^n)/2^n$ kdežto v definici F_m to bude 2^{m-n} členů tvaru $f(j/2^m)/2^m$, kde $j/2^m \in [i/2^n, (i+1)/2^n]$.

Protože $f(i/2^n)/2^n = 2^{m-n} f(i/2^n)/2^m$, je rozdíl tohoto členu pro F_n a uvedených členů pro F_m roven součtu 2^{m-n} výrazů $(f(i/2^n) - f(j/2^m))/2^m$, které jsou v absolutní hodnotě rovny nejvýše $\varepsilon/2^m$ a jejich součet je tedy nejvýše $\varepsilon/2^n$.

Tentýž postup lze provést i pro $i = k$ s tím rozdílem, že počet členů z definice F_m , které se nyní počítají (např. roven p), může být menší než 2^{m-n} a výraz $(x - \frac{k}{2^n})$ se napíše jako součet p výrazů $(x - \frac{k'}{2^m}) + (\frac{k'}{2^m} - \frac{k'-1}{2^m}) + \dots + \frac{k \cdot 2^{m-n} + 1}{2^m} - \frac{k \cdot 2^{m-n}}{2^m}$, kde k' je ono k příslušné k x v definici F_m . Výsledkem je opět odhad $\varepsilon/2^n$ absolutní hodnoty rozdílu uvedených výrazů pro F_n, F_m .

Protože $k \leq 2^n$, je $|F_n(x) - F_m(x)| < \varepsilon$, což se mělo dokázat. Existuje tedy bodová limita posloupnosti funkcí $\{F_n\}$, která se označí F .

Zbývá ukázat, že derivace F v bodě x je rovna $f(x)$, tj. že $\lim_{h \rightarrow 0} (|F(x+h) - F(x) - hf(x)|/h) = 0$.

Podobně jako v předchozí části důkazu necht' $\varepsilon > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ je takové, že pro $|x - y| < 1/2^n$ je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Necht' $h > 0$ (pro $h < 0$ je postup obdobný). Pro $m \geq n$ platí

$$F_m(x+h) - F_m(x) = \left(x+h - \frac{k_2}{2^m}\right) f\left(\frac{k_2}{2^m}\right) + \frac{1}{2^m} \sum_{i=k_1}^{k_2-1} f\left(\frac{i}{2^m}\right) - \left(x - \frac{k_1}{2^m}\right) f\left(\frac{k_1}{2^m}\right),$$

kde k_1, k_2 jsou příslušná čísla k z definice hodnoty F_m v bodě x nebo $x+h$ resp.

- Primitivní funkce
- [primitivní funkce](#)
- [jednoznačnost](#)
- [geometrický popis](#)
- [integrály 1](#)
- [integrály 2](#)
- [spojité funkce](#)
- [konstrukce prim.fce](#)
- [výpočet](#)
- [linearita](#)
- [per partes](#)
- [integrály 3](#)
- [substituce speciální](#)
- [substituce obecná](#)
- Poznámky
- [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
- Příklady
- [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
- Otázky
- [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
- Cvičení
- [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)
- Učení
- [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)

Součet koeficientů u všech $f(j/2^m)$ je roven h a tedy výraz $F_m(x+h) - F_m(x) - hf(x)$ se liší od výše uvedeného výrazu pro $F_m(x+h) - F_m(x)$ tím, že všude je místo příslušných $f(j/2^m)$ psáno $f(j/2^m) - f(x)$. Tudíž pro $h < 2^{-n}$ platí

$$|F_m(x+h) - F_m(x) - hf(x)|/h \leq \max\{|f(y) - f(x)|; y \in [x, x+h]\} \leq \varepsilon$$

Jestliže se na levou stranu provede limita podle m , dostane se hledaná nerovnost.

Zbývá větu dokázat pro otevřené a polootevřené intervaly (i neomezené). Důkaz je skoro stejný pro obě možnosti.

Důkaz. Důkaz věty. Necht' g je spojitá funkce na intervalu (a, b) . Tento interval lze napsat jako sjednocení $(a, b) = \bigcup [a_n, b_n]$ rostoucí posloupnosti kompaktních intervalů. Podle předchozího lemmatu existuje na každém intervalu $[a_n, b_n]$ primitivní funkce G_n k g a lze ji zvolit tak, že $G_n(a_1) = 0$. Při této volbě je zřejmé, že pro $n < m$ je zúžení G_m na $[a_n, b_n]$ rovno G_n . Nyní stačí definovat $G(x)$ pro $x \in (a, b)$ jako $G_n(x)$, kde $x \in [a_n, b_n]$.

- Primitivní funkce
- primitivní funkce
- jednoznačnost
- geometrický popis
- integrály 1
- integrály 2
- spojité funkce
- konstrukce prim.fce
- výpočet
- linearita
- per partes
- integrály 3
- substituce speciální
- substituce obecná
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTY PRO VÝPOČET NEURČITÝCH INTEGRÁLŮ

Tato část bude věnována obecným metodám, jak primitivní funkce nalézt. Speciální metody určené pro speciální typy funkcí budou uvedeny v následující kapitole.

VĚTA. (Linearita) Jsou-li F a G primitivní funkce k f , resp. g , na intervalu I , je lineární kombinace $\alpha F + \beta G$ primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I , tj.

$$\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

$$\int f \cdot g \neq \int f \cdot \int g$$

$$\int \frac{f}{g} \neq \frac{\int f}{\int g}$$

[Poznámky 2](#) [Příklady 2](#) [Otázky 2](#)

[Cvičení 2](#)[Učení 2](#)

Ze vzorce pro součin derivací lze odvodit následující velmi důležité tvrzení, tzv. integraci po částech (z latiny: per partes), která se používá pro integraci součinu dvou funkcí.

VĚTA. (Integrace po částech) Necht' funkce f, g mají na intervalu I derivace f', g' . Má-li $f'g$ na I primitivní funkci H , má funkce fg' na I primitivní funkci $fg - H$, tj.,

Primitivní funkce
primitivní funkce
jednoznačnost
geometrický popis
integrály 1
integrály 2
spojité funkce
konstrukce prim.fce
výpočet
linearita
per partes
integrály 3
substituce speciální
substituce obecná
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\int fg' = fg - \int f'g \quad \text{na } I.$$

Pomocí integrace po částech lze zjistit mnoho primitivních funkcí-

funkce f	interval I	prim.funkce k f na I
$x \sin x$	\mathbb{R}	$-x \cos x + \sin x$
xe^x	\mathbb{R}	$e^x(x - 1)$
$x^2 \sin x$	\mathbb{R}	$-x^2 \cos^2 x + 2x \sin x + 2 \cos x$
$\lg x$	$(0, +\infty)$	$x(\lg x - 1)$
$\operatorname{arctg} x$	\mathbb{R}	$x \operatorname{arctg} x - \lg(\sqrt{x^2 + 1})$
$e^{ax} \sin(bx)$	\mathbb{R}	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin(bx) - b \cos(bx))$

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Cvičení 3 Učení 3 Ze vzorce o derivaci složené funkce lze získat tzv. větu o substituci pro integraci. Na rozdíl od derivace součinu nemá derivace složené funkce symetrický

Primitivní funkce
 primitivní funkce
 jednoznačnost
 geometrický popis
 integrály 1
 integrály 2
 spojité funkce
 konstrukce prim.fce
 výpočet
 linearita
 per partes
 integrály 3
 substituce speciální
 substituce obecná
 Poznámky
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Příklady
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Otázky
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Cvičení
 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Učení
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

charakter a proto lze příslušnou větu o substituci napsat ve dvou verzích podle toho, z které strany rovnosti se vychází.

VĚTA. (1. substituční věta) Mějme následující situaci:

1. funkce φ má derivaci na otevřeném intervalu I ;
2. funkce f je definována na otevřeném intervalu $J \supset \varphi(I)$;
3. F je primitivní k funkci f na J .

Potom funkce $F \circ \varphi$ je primitivní k $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na I , tj.,

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(t) dt$$

pro $x \in I$, kde za t se musí po výpočtu dosadit $\varphi(x)$.

VĚTA. (2. substituční věta.) Mějme následující situaci:

1. funkce ψ má nenulovou derivaci na otevřeném intervalu J ;
2. funkce f je definovaná na otevřeném intervalu $I = \psi(J)$;
3. G je primitivní k funkci $(f \circ \psi) \cdot \psi'$ na J .

Potom funkce $G \circ \psi^{-1}$ je primitivní k f na I , tj.,

$$\int f(x) dx = \int f((\psi(t))\psi'(t) dt$$

pro $x \in I$, kde za t se musí po výpočtu dosadit $\psi^{-1}(x)$.

Primitivní funkce
primitivní funkce
jednoznačnost
geometrický popis
integrály 1
integrály 2
spojité funkce
konstrukce prim.fce
výpočet
linearita
per partes
integrály 3
substituce speciální
substituce obecná
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

Cvičení 4 Učení 4

Primitivní funkce
primitivní funkce
jednoznačnost
geometrický popis
integrály 1
integrály 2
spojité funkce
konstrukce prim.fce
výpočet
linearita
per partes
integrály 3
substituce speciální
substituce obecná
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9